Analisi Matematica per Informatici: esercizi svolti e formulari utili a.a. 2006-2007

Dott. Simone Zuccher

5 marzo 2007

Sono qui raccolte le esercitazioni di Analisi Matematica svolte per il Corso di Laurea in Informatica presso l'Università degli Studi di Verona nell'anno accademico 2006-2007.

Ciascun argomento è preceduto da brevissimi richiami di teoria (non esaustivi), per la quale si rimanda alle dispense del Prof. Squassina o a testi equivalenti.

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (`zuccher@sci.univr.it`).

Indice

1 Simboli

$=$	uguale a	$\neq$	diverso da
$\exists$	esiste	$\nexists$	non esiste
$\forall$	per ogni	$\exists!$	esiste ed è unico
$\Rightarrow$	implica	$\not\Rightarrow$	non implica
$\Leftrightarrow$	equivale a	$\not\Leftrightarrow$	non equivale a
$\in$	appartiene a	$\notin$	non appartiene a
$\subseteq$	contenuto in	$\nsubseteq$	non contenuto in
$\subset$	contenuto strettamente in	$\not\subset$	non contenuto strettamente in
$\cup$	unione	$\cap$	intersezione
$\vee$	o (*vel*, OR)	$\wedge$	e (*et*, AND)
$:$	tale che		

2 Insiemi

Definizioni utili per gli esercizi:

- $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- $A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- $A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
- $A^c = \{x : x \notin A\}$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \ \Rightarrow x \in B)$
- $A = B \Leftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$
- $\mathcal{P}(A)$, ovvero l'insieme delle parti di A, è la famiglia di tutti i sottoinsiemi (propri ed impropri) di A.
- $A \times B = \{(x, y) : (x \in A \wedge y \in B)\}$

2.1 Esercizio

Si dimostri che $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

2.1.1 Risoluzione

Per dimostrare la doppia implicazione bisogna dimostrare sia che $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$, sia che $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$.

1. Supponiamo $A \subseteq B$ e dimostriamo che questo implica $A \cup B = B$, ossia $A \cup B \subseteq B$ e $B \subseteq A \cup B$.

   (a) Dimostriamo che $A \cup B \subseteq B$. $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$, ma essendo per ipotesi $A \subseteq B$ si ha che $x \in A \Rightarrow x \in B$, ossia
   $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B$.

(b) Dimostriamo che $B \subseteq A \cup B$. $x \in B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow A \cup B$

2. Supponiamo $A \cup B = B$ e dimostriamo che questo implica $A \subseteq B$.
   $A \cup B \Rightarrow A \subseteq A \cup B = B$ (per ipotesi), ossia $A \subseteq B$.

2.2 Esercizio

Si dimostri che $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

2.2.1 Risoluzione

Come nel caso precedente, bisogna dimostrare due implicazioni.

1. Supponiamo $A \subseteq B$ e dimostriamo che questo implica $A \cap B = A$, ossia $A \cap B \subseteq A$ e $A \subseteq A \cap B$.
   (a) Dimostriamo che $A \cap B \subseteq A$. $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$, ossia $x \in A$.
   (b) Dimostriamo che $A \subseteq A \cap B$. $x \in A \Rightarrow x \in B$ (per ipotesi), ossia $x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$.
2. Supponiamo $A \cap B = A$ e dimostriamo che questo implica $A \subseteq B$.
   $A = A \cap B \subseteq B$.

2.3 Esercizio

Si dimostri che

$$A \cup (A \cap B) = A \qquad \text{e} \qquad A \cap (A \cup B) = A$$

2.3.1 Risoluzione

1. Siccome $(A \cap B) \subseteq A$, dalla proprietà dimostrata nell'esercizio 2.1 segue immediatamente $A \cup (A \cap B) = A$.
2. Siccome $A \subseteq (A \cup B)$, dalla proprietà dimostrata nell'esercizio 2.2 segue immediatamente $A \cap (A \cup B) = A$.

2.4 Esercizio

Si dimostri che $A \setminus B = A \cap B^c$.

2.4.1 Risoluzione

$x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B^c) \Leftrightarrow x \in (A \cap B^c)$

2.5 Esercizio

Si dimostri che $(A^c)^c = A$.

2.5.1 Risoluzione

$x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A$

2.6 Esercizio

Si dimostrino le relazioni di De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad \text{e} \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

2.6.1 Risoluzione

1. $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow ((x \notin A) \wedge (x \notin B)) \Leftrightarrow ((x \in A^c) \wedge (x \in B^c)) \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$

2. $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow ((x \notin A) \vee (x \notin B)) \Leftrightarrow ((x \in A^c) \vee (x \in B^c)) \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$

2.7 Esercizio

Si dimostri la proprietà ditributiva dell'unione rispetto all'intersezione:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

2.7.1 Risoluzione

$x \in ((A \cap B) \cup C) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee (x \in C) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in C)) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C)) \Leftrightarrow x \in ((A \cup C) \cap (B \cup C))$.

2.8 Esercizio

Si dimostri la proprietà ditributiva dell'intersezione rispetto all'unione:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

2.8.1 Risoluzione

$x \in ((A \cup B) \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge (x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \vee x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C))$

2.9 Esercizio

Utilizzando le proprietà sugli insiemi dimostrate negli esercizi precedenti, semplificare le seguenti espressioni:

1. $[A \cup (A \cap B)] \cap B$

2. $A \cap B \cap (B \cup C^c)$

2.9.1 Risoluzione

1. $[A \cup (A \cap B)] \cap B = [(A \cup A) \cap (A \cup B)] \cap B = [A \cap (A \cup B)] \cap B = A \cap B$.
   C'è anche un modo molto più veloce, tenuto conto delle proprietà dimostrate nell'esercizio 2.3. Infatti, da $((A \cap B) \cup A) = A$ segue la soluzione $A \cap B$.

2. $A \cap B \cap (B \cup C^c) = A \cap (B \cap (B \cup C^c)) = A \cap ((B \cap B) \cup (B \cap C^c)) = A \cap (B \cup (B \setminus C)) = A \cap B$.
   Anche in questo caso, si poteva procedere in modo più veloce tenendo conto delle proprietà dimostrate nell'esercizio 2.3 ed osservando che $B \cap (B \cup C^c) = B$, da cui la soluzione $A \cap B$.

2.10 Esercizio

Dati $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{b, d\}$, si ricavi:

1. $B \cup C$
2. $A \cup C$
3. $B \cap C$
4. $A \cap C$
5. $A \times B$
6. $A \times C$
7. $\mathcal{P}(A)$
8. $A \setminus C$

2.10.1 Risoluzione

1. $B \cup C = \{1, 2, b, d\}$
2. $A \cup C = \{a, b, c, d\}$
3. $B \cap C = \emptyset$
4. $A \cap C = \{b\}$
5. $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
6. $A \times C = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, b), (c, d)\}$
7. $\mathcal{P}(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \emptyset, \{a, b, c\}\}$
8. $A \setminus C = \{a, c\}$

2.11 Esercizio

Dati $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{b, d\}$, verificare che:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $A \times B \neq B \times A$
4. $B \times (A \setminus C) = (B \times A) \setminus (B \times C)$

2.11.1 Risoluzione

Si lascia allo studente diligente la banale verifica.

2.12 Esercizio

Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}^+$ sia

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n} \right\}.$$

Determinare $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^+} A_n$ e $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^+} A_n$.

2.12.1 Risoluzione

- Intersezione.
  Si verifica facilmente che $1 - \dfrac{1}{n} < 1 < 1 + \dfrac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$, quindi certamente $1 \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^+} A_n$. Dimostriamo che non esiste nessun altro valore di $x \in \mathbb{R}$ che appartenga all'intersezione. Sia $a \in \mathbb{R}, a > 1$. Detto $\epsilon = a - 1 > 0$, a seguito della proprietà di Archimede è possibile determinare un numero naturale $\bar{n}$ tale che $\bar{n} > 1/\epsilon$ (ovvero $\epsilon > 1/\bar{n}$). Siccome $a = 1 + \epsilon > 1 + 1/\bar{n}$, segue $a \notin \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^+} A_n$.

  Analogamente si dimostra che $a \in \mathbb{R}, a < 1 \Rightarrow a \notin \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^+} A_n$ (esercizio per lo studente diligente). Pertanto $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^+} A_n = \{1\}$.

- Unione.
  È sufficiente osservare che gli A_n sono progressivamente contenuti l'uno all'interno dell'altro al crescere di n, ovvero $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$ e pertanto $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^+} A_n = A_1$.

2.13 Esercizio

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}\right\}$. Determinare $\bigcap_{n=3}^{6} A_n$.

2.13.1 Risoluzione

Si osservi che $A_3 \subset A_4 \subset A_5 \subset A_6$ e pertanto $\bigcap_{n=3}^{6} A_n = A_3$.

2.14 Esercizio

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $A_n = \{x \in \mathbb{R} : x \leq n^2\}$. Dimostrare che $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \mathbb{R}$.

2.14.1 Risoluzione

Si veda l'esercizio 9.14 delle dispense del Prof. Squassina.

2.15 Esercizio

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, -\frac{1}{n} \leq y \leq \frac{1}{n}\right\}$. Determinare $\bigcap_{n \geq 1} A_n$.

2.15.1 Risoluzione

Si veda l'esercizio 9.15 delle dispense del Prof. Squassina.

3 Relazioni

Definizioni utili per gli esercizi:

- Diciamo che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in $X \times X$ se verifica le seguenti proprietà:
  1. Riflessiva. $\forall x \in X : x\mathcal{R}x$
  2. Simmetrica. $\forall x \in X, \forall y \in X : x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
  3. Transitiva. $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X : (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$
- Diciamo che $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine in $X \times X$ se verifica le seguenti proprietà:
  1. Riflessiva. $\forall x \in X : x\mathcal{R}x$
  2. Antimmetrica. $\forall x \in X, \forall y \in X : (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$
  3. Transitiva. $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X : (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$

  Una relazione d'ordine si dice di ordine *totale* se, oltre alle 3 proprietà precedenti soddisfa anche la seguente: $\forall x \in X, \forall y \in X : (x\mathcal{R}y)$ oppure $(y\mathcal{R}x)$.

- Data una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ in X, chiamiamo classe di equivalenza di $x \in X$, e la indichiamo con $[x]$, l'insieme di tutti gli elementi di X che sono in relazione di equivalenza con x, ossia: $[x] = \{y \in X : x\mathcal{R}y\}$.

3.1 Esercizio

Analizzare le proprietà delle seguenti relazioni:

- Essere figlio di.
- Frequentare la stessa classe.
- Essere rette parallele nel piano.
- Essere rette perpendicolari nel piano.

3.1.1 Risoluzione

- Non è riflessiva, non è simmetrica, non è transitiva e non è antisimmetrica.
- È riflessiva, è simmetrica, è transitiva, quindi è un'equivalenza.
- È riflessiva, è simmetrica, è transitiva, quindi è un'equivalenza.
- Non è riflessiva, è simmetrica, non è transitiva.

3.2 Esercizio

Verificare che le seguenti relazioni sono di equivalenza:

- Portare gli occhiali.
- La similitudine tra i poligoni di un piano.
- La congruenza tra figure piane.

3.2.1 Risoluzione

Basta verificare che ciascuna relazione gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva (cosa piuttosto banale).

3.3 Esercizio

Presi $x, y \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, insieme dei numeri interi relativi), e definita in $\mathbb{Z}$ la seguente relazione $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$ "$x - y$ è divisibile per 4", si verifichi che essa è una relazione di equivalenza e si determinino le classi di equivalenza.

3.3.1 Risoluzione

Proprietà riflessiva: $x - x$ (ossia 0) è divisibile per 4 (0 diviso $4 = 0 \in \mathbb{Z}$), per cui $x\mathcal{R}x$.
Proprietà simmetrica: se $x - y$ è divisibile per 4 allora certamente lo è anche $y - x = -(x - y)$, ovvero il suo opposto, per cui $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
Proprietà transitiva: se $x - y$ è divisibile per 4 ($x\mathcal{R}y$) allora $\exists k_1 \in \mathbb{Z} : x - y = k_1 4$. Se $y - z$ è divisibile per 4 ($y\mathcal{R}z$) allora $\exists k_2 \in \mathbb{Z} : y - z = k_2 4$. Sommando membro a membro si ottiene $x - z = (k_1 + k_2)4 = k4, k \in \mathbb{Z}$, ovvero $x\mathcal{R}z$. Quindi, $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
Le classi di equivalenza sono 4: quella dei numeri relativi divisibili per 4 (ovvero i multipli di 4: $\{0, \pm 4, \pm 8, \dots\}$), quella dei (multipli di 4)+1 (ovvero $\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots$), quella dei (multipli di 4)+2 ($\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots$) e quella dei (multipli di 4)+3 ($\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots$).

3.4 Esercizio

Presi $x, y \in \mathbb{Z}$ e definita in $\mathbb{Z}$ la seguente relazione $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$ "$xy > 0$", si verifichi che essa è una relazione di equivalenza in $\mathbb{Z}$.

3.4.1 Risoluzione

Proprietà riflessiva: $xx = x^2 > 0$, per cui $x\mathcal{R}x$.
Proprietà simmetrica: se $xy > 0$ allora anche $yx > 0$, per cui $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
Proprietà transitiva: se $xy > 0$ e $yz > 0$ significa che x, y, z sono tutti concordi e pertanto $xz > 0$, ovvero $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

3.5 Esercizio

Dato l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ di un insieme finito di elementi A, si dimostri che la relazione di inclusione '$\subseteq$' è d'ordine *parziale* su $\mathcal{P}(A)$.

3.5.1 Risoluzione

Si noti l'enfasi sul fatto che l'ordinamento è parziale e non totale, ossia bisogna verificare solo le 3 proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Siano X, Y due sottoinsiemi dell'insieme delle parti di A, ovvero $X, Y \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow (X \subseteq \mathcal{P}(A) \wedge (Y \subseteq \mathcal{P}(A))$ e verifichiamo le suddette proprietà.
Proprietà riflessiva: se $X \subseteq \mathcal{P}(A)$ allora $X \subseteq X$, per cui $X\mathcal{R}X$.
Proprietà antisimmetrica: presi $X, Y \subseteq \mathcal{P}(A)$, ovvero $(X \subseteq \mathcal{P}(A) \wedge (Y \subseteq \mathcal{P}(A))$, se si assume $(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)$ si ha $X = Y$, ossia $(X\mathcal{R}Y) \wedge (Y\mathcal{R}X) \Rightarrow X = Y$.
Proprietà transitiva: presi $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$, se $(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq Z) \Rightarrow X \subseteq Z$, ovvero $(X\mathcal{R}Y) \wedge (Y\mathcal{R}Z) \Rightarrow X\mathcal{R}Z$.

3.6 Esercizio

Si consideri l'insieme dei numeri naturali privati dello 0, ossia $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, sul quale è definita la relazione $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$ "x è divisibile per y". Si verifichi che questa è una relazione d'ordine parziale.

3.6.1 Risoluzione

Proprietà riflessiva: x è divisibile per se stesso, quindi $x\mathcal{R}x$.
Proprietà antisimmetrica: se x è divisibile per y e simultaneamente y è divisibile per x, l'unica possibilità è che x e y coincidano, ovvero $(x\mathcal{R}y) \wedge (x\mathcal{R}y) \Rightarrow x = y$.
Proprietà transitiva: se x è divisibile per y e y è divisibile per z allora $x = k_1 y \quad (k_1 \in \mathbb{N})$ e $y = k_2 z \quad (k_2 \in \mathbb{N})$ e quindi $x = k_1 k_2 z$, ossia x è divisibile per z. In conclusione, $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

3.7 Esercizio

Siano A e B due insiemi non vuoti totalmente ordinati e consideriamo su $A \times B$ la relazione definita da "$(a, b) \leq (a', b')$ se $a \leq a'$ e, nel caso $a = a'$, $b \leq b'$". Dimostrare che la relazione è d'ordine *totale*.

3.7.1 Risoluzione

Si noti che la relazione in questione è quella lessicografica ristretta a parole di 2 lettere.
Proprietà riflessiva: la coppia ordinata $(a, b) \in A \times B$ è tale per cui $a \leq a$ e $b \leq b$, per cui $(a, b)\mathcal{R}(a, b)$.
Proprietà antisimmetrica: prese le coppie $(a, b) \in A \times B$ e $(a', b') \in A \times B$, se la parola (a, b) (di 2 lettere) viene prima o coincide con la parola (a', b'), ovvero $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$, e la parola (a', b') viene prima o coincide con (a, b), ovvero $(a', b')\mathcal{R}(a, b)$, allora la parola in questione è sempre la stessa ossia $(a, b) = (a', b')$. Quindi $(a, b)\mathcal{R}(a', b') \wedge (a', b')\mathcal{R}(a, b) \Rightarrow (a, b) = (a', b')$.
Proprietà transitiva: se si prendono 3 parole di due lettere $(a, b), (a', b'), (a'', b'') \in A \times B$ e (a, b) viene prima o coincide con (a', b') la quale a sua volta viene prima o coincide con (a'', b''), si conclude facilmente che (a, b) viene prima o coincide con (a'', b''). Quindi $(a, b)\mathcal{R}(a', b') \wedge (a', b')\mathcal{R}(a'', b'') \Rightarrow (a, b)\mathcal{R}(a'', b'')$.
La relazione in questione è pertanto d'ordine. Inoltre, siccome si può stabilire $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$ oppure $(a', b')\mathcal{R}(a, b)$, ossia (a, b) viene o prima o dopo (a', b') (oppure coincide), allora l'ordine è totale.

3.8 Esercizio

Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0) \wedge (0 \leq y \leq x)\}$ e sia $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow (a - c, b - d) \in E$. Si dimostri che tale relazione è d'ordine su $\mathbb{R}^2$.

3.8.1 Risoluzione

Proprietà riflessiva: la coppia ordinata $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ è tale per cui $(a-a, b-b) = (0, 0) \in E$, per cui $(a, b)\mathcal{R}(a, b)$.
Proprietà antisimmetrica: prese le coppie $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, se $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ e $(c, d)\mathcal{R}(a, b)$ allora $(a - c, b - d) \in E$ e $(c - a, d - b) \in E$, ovvero $(a - c \geq 0) \wedge (c - a \geq 0) \Rightarrow a - c = c - a = 0$, ossia $a = c$. Inoltre, essendo nullo il primo elemento x delle coppie $(x, y) \in E$ si ha che anche il secondo (y) è nullo in quanto $0 \leq y \leq x = 0$. Questo implica che anche $b - d = d - b = 0$, ovvero $b = d$. Quindi $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \wedge (c, d)\mathcal{R}(a, b) \Rightarrow (a, b) = (c, d)$.
Proprietà transitiva: si prendano 3 coppie $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2$ e si supponga che valgano le relazioni $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \wedge (c, d)\mathcal{R}(e, f)$. A seguito di queste ipotesi, si ha $a-c \geq 0$, $c-e \geq 0$, $0 \leq b-d \leq a-c$ e $0 \leq d-f \leq c-e$. Allora $a-e$ e $b-f$ si possono riscrivere rispettivamente come $a-e = (a-c)+(c-e)$ e $b-f = (b-d)+(d-f)$. Date le ipotesi, si ottiene $(a - c) + (c - e) \geq 0 \Rightarrow (a - e) \geq 0$ e $(b - d) + (d - f) \leq (a - c) + (c - e) = a - e \Rightarrow 0 \leq (b - f) \leq (a - e)$, ossia si è ottenuto che la coppia $(a - e, b - f) \in E$, ovvero $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \wedge (c, d)\mathcal{R}(e, f) \Rightarrow (a, b)\mathcal{R}(e, f)$.

4 Funzioni

Definizioni utili per gli esercizi:

- Funzione: legge che associa ad ogni elemento di X *un solo* elemento di Y. Scriveremo $f : X \to Y$ oppure $y = f(x)$, con $x \in X \wedge y \in Y$. X si chiama dominio e Y codominio.

- Immagine: siano $f : X \to Y$ e $A \subseteq X$. Si definisce immagine di A mediante f, e si indica con $f(A)$, il sottoinsieme $B \subseteq Y$ definito da
$B = f(A) = \{y \in Y : (\exists x \in A : y = f(x))\}$

- Funzione iniettiva: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ oppure, equivalentemente, $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$. Quindi $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

- Funzione suriettiva: $f(X) = Y$, ovvero $\forall y \in Y \;\; \exists x \in X : y = f(x)$.

- Funzione biiettiva: se è iniettiva e suriettiva.

- Funzione inversa: data una funzione iniettiva $y = f(x)$, esiste una ed una sola applicazione da $f(X)$ in X, e la si indica con f^{-1}, che ad ogni $y \in f(X)$ associa $x \in X : f(x) = y$.
Tale definizione si può anche riformulare nel modo seguente (totalmente equivalente): data una funzione biiettiva $y = f(x)$, con $x \in X$ e $y \in Y$, si definisce funzione inversa di f e la si indica con f^{-1} la funzione che associa ad ogni elemento $y \in Y$ *il solo* elemento $x \in X : f(x) = y$.

- Funzione composta: date $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, si definisce funzione composta $h : X \to Z$ la funzione $h(x) = g(f(x))$, ovvero $h = g \circ f$.

4.1 Esercizio

Si dimostri che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x/2-1$ è biiettiva e si determini la funzione inversa.

4.1.1 Risoluzione

Bisogna dimostrare che $f(x)$ è sia iniettiva che suriettiva.
Iniettiva: $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1/2 - 1 \neq x_2/2 - 1) \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$.
Suriettiva: $y = f(x)$ può assumere tutti i valori di $\mathbb{R}$ e si può sempre determinare il corrispondente $x \in \mathbb{R}$, ossia $\forall y \in Y \;\; \exists x \in X : y = f(x)$.
Funzione inversa: $x = 2y + 2$.

4.2 Esercizio

Si dimostri che $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(x) = x+23$ è iniettiva ma non suriettiva, mentre $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è biiettiva.

4.2.1 Risoluzione

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
  Iniettiva: $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 + 23 \neq x_2 + 23) \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$.
  Non suriettiva: da $f(x) = x + 23$, affinché possa esistere $x \in \mathbb{N} : f(x) = y$, ossia $x+23 = y$ ammetta una soluzione $x \in \mathbb{N}$ per $y \in \mathbb{N}$ fissata, dovrebbe essere $y \geq 23$. Siccome non vale il $\forall y \in Y$ della definizione, la funzione non è suriettiva.

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
  Iniettiva: come sopra.
  Suriettiva: lo è perché $\forall y \in \mathbb{Z} \;\; \exists x \in \mathbb{Z} : y = f(x)$.

4.3 Esercizio

Si dimostri che $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ ($\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$) definita da

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \text{ è dispari} \\ x-1 & \text{se } x \text{ è pari} \end{cases}$$

è biiettiva e si determini la funzione inversa.

4.3.1 Risoluzione

Bisogna dimostrare che $f(x)$ è sia iniettiva che suriettiva.
Iniettiva. Bisogna suddividere in 3 casi: x_1 e x_2 entrambi pari, entrambi dispari e uno pari e uno dispari. Supponiamo x_1 e x_2 pari, $x_1 \neq x_2$. Allora si ha $f(x_1) = x_1 - 1$ e $f(x_2) = x_2 - 1$, pertanto $f(x_1) \neq f(x_2)$. Se x_1 e x_2 sono dispari, e $x_1 \neq x_2$, si ha $f(x_1) = x_1 + 1$ e $f(x_2) = x_2 + 1$, pertanto $f(x_1) \neq f(x_2)$. Infine, considerando x_1 pari e x_2 dispari si ha che $f(x_1)$ è dispari e $f(x_2)$ pari, per cui è ancora $f(x_1) \neq f(x_2)$. La

funzione è quindi iniettiva.
Suriettiva: si verifica che $y = f(x)$ può assumere tutti i valori di $\mathbb{N}^+$, ossia si può sempre determinare il corrispondente $x \in \mathbb{N}^+$ tale che $y = f(x)$.
Funzione inversa:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y+1 & \text{se } y \text{ è dispari} \\ y-1 & \text{se } y \text{ è pari} \end{cases}$$

Si noti che f^{-1} coincide con f.

4.4 Esercizio

Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 + x + 1$, si determini la sua immagine e si verifichi se f è invertibile oppure no. Nel caso non lo sia, esiste un sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}$ tale che $f_{|D}$ sia invertibile?

4.4.1 Risoluzione

Immagine: l'immagine di f non è nient'altro che $Y = f(R)$, ovvero l'insieme delle $y \in R$ tali per cui l'equazione $x^2 + x + 1 = y$ abbia almeno una soluzione reale ($x \in \mathbb{R}$). A tal fine, si può osservare che la parabola $y = x^2 + x + 1$ ha concavità verso l'alto e il vertice di coordinate $V(-1/2; 3/4)$; quindi si avranno soluzioni reali solo per $y \geq 3/4$ e pertanto $Y = f(X) = [3/4; +\infty[$. Alternativamente si può calcolare il discriminante Δ dell'equazione $x^2 + x + 1 - y = 0$ e imporre che sia $\Delta \geq 0$. Così facendo si ottiene $1 - 4(1 - y) \geq 0$, che porta ancora a $y \geq 3/4$, ovvero $Y = f(X) = [3/4; +\infty[$.
Iniettiva: $x_1 \neq x_2$ non implica necessariamente $f(x_1) \neq f(x_2)$ in quanto, fissata $y \in Y \wedge y \neq 3/4$, i valori di x tali che $y = f(x)$ sono due. Infatti, $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + x_1 + 1 \neq x_2^2 + x_2 + 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 1) \neq 0 \Rightarrow (x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq -x_2 - 1)$. In altre parole, $x_1 \neq x_2 \nRightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ e pertanto f non è iniettiva. Tuttavia, restringendo il dominio di f a $D =]-\infty; -1/2]$ o a $D = [-1/2; +\infty[$ $f_{|D}$ è iniettiva (si noti che $x = -1/2$ è l'asse di simmetria della parabola).

4.5 Esercizio

Data la funzione $f : [-1; 0[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/x^2$, si determini l'immagine Y di f e, nel caso la funzione $f : [-1; 0[\to Y$ sia biiettiva, si determini la funzione inversa.

4.5.1 Risoluzione

Immagine: si noti che, $\forall \epsilon > 0$ si ha $1/x^2 < 1/(x + \epsilon)^2$ se e solo se $x < -\epsilon/2$, ovvero solo per valori negativi della x. In altre parole, $1/x^2$ è una funzione crescente per $x < 0$ e quindi $f([-1; 0[) = [1; +\infty[$.
Iniettiva: $f(x_1) \neq f(x_2)$ con $x_1, x_2 \in [-1; 0[$ equivale a $1/x_1^2 \neq 1/x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 \neq x_2^2 \Rightarrow x_1 \neq \pm x_2$. Essendo $x_1, x_2 \in [-1; 0[$, ossia entrambe negative, l'unica soluzione accettabile è $x_1 \neq x_2$ e pertanto $f : [-1; 0[\to Y$ è iniettiva.
Suriettiva: la funzione $f : [-1; 0[\to Y$ è certamente suriettiva in quanto Y è l'immagine di $[-1; 0[$ tramite f, ossia $\forall y \in Y \ \exists x \in [-1; 0[: y = f(x)$.
Funzione inversa: $f^{-1} : [1; +\infty[\to [-1; 0[$ definita da $x = -1/\sqrt{y}$.

4.6 Esercizio

Siano $f(x) = 1/(1 + x^4)$ e $g(x) = x^2$. Determinare $f \circ g$ e $g \circ f$.

4.6.1 Risoluzione

$$f \circ g = f(g(x)) = \frac{1}{1 + (x^2)^4} = \frac{1}{1 + x^8}$$

$$g \circ f = g(f(x)) = \left(\frac{1}{1 + x^4}\right)^2 = \frac{1}{(1 + x^4)^2}$$

5 Estremanti

Definizioni utili per gli esercizi:

- Estremo superiore. Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente, si definisce estremo superiore di E e si indica con $\sup E$ o $\sup\limits_{x \in E} x$ il minore dei maggioranti per E. Ovvero, se $L = \sup E$ valgono le seguenti affermazioni:
  - $\forall x \in E : x \leq L$ (L è un maggiorante per E)
  - $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists x \in E : L - \epsilon < x$ ($L - \epsilon$ non è maggiorante per E)
- Massimo. Si noti che l'estremo superiore L può non appartenere ad E. Se $L \in E$, allora si chiama massimo e si indica con $\max E$ oppure $\max\limits_{x \in E} x$.
- Estremo inferiore. Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente, si definisce estremo inferiore di E e si indica con $\inf E$ o $\inf\limits_{x \in E} x$ il maggiore dei minoranti per E. Ovvero, se $l = \inf E$ valgono le seguenti affermazioni:
  - $\forall x \in E : x \geq l$ (l è un minorante per E)
  - $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists x \in E : l + \epsilon > x$ ($l + \epsilon$ non è minorante per E)
- Minimo. Si noti che l'estremo inferiore l può non appartenere ad E. Se $l \in E$, allora si chiama minimo e si indica con $\min E$ oppure $\min\limits_{x \in E} x$.

5.1 Esercizio

Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

5.1.1 Risoluzione

Si noti che, al crescere di n, $1/n$ diminuisce poiché $1/(n+1) < 1/n$. Pertanto l'estremo superiore è 1 e si ottiene in corrispondenza di $n = 1$, quindi $\sup A = \max A = 1$ ($1 \in A$). Siccome $1/(n+1) < 1/n$, l'estremo inferiore potrebbe essere 0. Affinché questo sia vero devono essere verificate le due proprietà:

1. $l = 0$ è un minorante. Si noti che $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : 0 < 1/n$, infatti questo equivale a $0 < 1$ che è sempre vero. Quindi $l = 0$ è un minorante.

2. $l = 0$ è il maggiore dei minoranti. Preso $\epsilon > 0$ è possibile determinare $\bar{n}$ tale che $0+\epsilon > 1/\bar{n}$, infatti basta prendere $\bar{n} > 1/\epsilon$ (proprietà di Archimede). In pratica, si è dimostrato che $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists x \in A : 0 + \epsilon > x = 1/\bar{n}$, ovvero che $l = 0$ è il maggiore dei minoranti.

Concludendo, $\inf A = 0$ e $\nexists \min A$.

5.2 Esercizio

Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

5.2.1 Risoluzione

$\inf A = \min A = 0$, $\sup A = 1$ e $\nexists \max A$ (si veda l'esempio 4.7 delle dispense del Prof. Squassina).

5.3 Esercizio

Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{2n}{n^2+1} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

5.3.1 Risoluzione

Si noti che l'insieme è limitato sia superiormente che inferiormente. Infatti, $\forall n \in \mathbb{Z} : -1 \leq 2n/(n^2+1) \leq 1$, come si verifica facilmente osservando che $-1 \leq 2n/(n^2+1) \leq 1 \Leftrightarrow -(n^2+1) \leq 2n \leq (n^2+1) \Leftrightarrow -(n^2+2n+1) \leq 0 \leq (n^2-2n+1) \Leftrightarrow -(n+1)^2 \leq 0 \leq (n-1)^2$. Quindi eventuali estremanti sono ± 1. In particolare, per $n = 1$ si ottiene $2n/(n^2+1) = 1$ e per $n = -1$ si ottiene $2n/(n^2+1) = -1$, quindi $\inf A = \min A = -1$ e $\sup A = \max A = 1$.

5.4 Esercizio

Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme

$$A = \left\{ n + \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

5.4.1 Risoluzione

Si noti che, al crescere di n, $2/n$ diminuisce ma n aumenta. Pertanto A non è limitato superiormente e quindi $\sup A = +\infty$. Per quanto riguarda l'estremo inferiore, si noti che per $n = 1$ e $n = 2$ si ha $n + 2/n = 3$, mentre $\forall n \geq 3 : n + 2/n > n$. Pertanto, l'estremo inferiore è 3, ma siccome appartiene ad A ne è anche il mimimo e quindi $\inf A = \min A = 3$.

5.5 Esercizio

Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme

$$A = \left\{ a_n = \frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

5.5.1 Risoluzione

Si noti che $a_n < a_{n+1}$, infatti

$$\frac{n-1}{n+1} < \frac{n+1-1}{n+1+1} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n+1} < \frac{n}{n+2} \Leftrightarrow n^2 + 2n - n - 2 < n^2 + n \Leftrightarrow -2 < 0$$

Quindi, l'estremo inferiore si ha in corrispondenza di $n = 0$ e vale -1. Inoltre, siccome $a_0 \in A$, -1 è anche il minimo e quindi, $\inf A = \min A = -1$.
Per quanto riguarda l'estremo superiore, si noti che $a_n < 1$. Infatti,

$$\frac{n-1}{n+1} < 1 \Leftrightarrow n - 1 < n + 1 \Leftrightarrow -1 < 1,$$

quindi 1 potrebbe essere l'estremo superiore. Per dimostrarlo, come al solito, si deve dimostrare non solo che è un maggiorante (cosa appena fatta) ma che è il minore dei maggioranti. Quindi, bisogna dimostrare che preso arbitrariamente un $\epsilon > 0$ si può determinare un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $1 - \epsilon < a_{\bar{n}} = (\bar{n} - 1)/(\bar{n} + 1)$. Risolvendo si ha

$$1 - \epsilon < \frac{\bar{n}-1}{\bar{n}+1} \Leftrightarrow \frac{\bar{n}+1-\bar{n}+1}{\bar{n}+1} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\bar{n}+1} < \epsilon \Leftrightarrow \bar{n} + 1 > \frac{2}{\epsilon} \Leftrightarrow \bar{n} > \frac{2}{\epsilon} - 1.$$

Pertanto, $\sup A = 1$ e $\nexists \max A$.

5.6 Esercizio

Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme

$$A = \left\{ a_n = \frac{n^2 + (-1)^n n}{n^2} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

5.6.1 Risoluzione

Risulta più semplice riscrivere a_n come $a_n = 1 + (-1)^n/n$ e dividere in due casi

$$a_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n} & \text{per } n \text{ pari} \\ \\ 1 - \dfrac{1}{n} & \text{per } n \text{ dipari} \end{cases}$$

- n pari. Il ragionamento è analogo a quello degli esercizi precedenti. Si osservi che $1/n$ decresce al crescere di n e quindi il valore maggiore si ha per il primo numero pari $n = 2 \Rightarrow 1 + 1/n = 3/2$. Questo non solo è estremo superiore ma anche massimo. L'estremo inferiore è invece 1 (il minimo non esiste). Infatti 1 è un minorante perché $1 + 1/n > 1 \Leftrightarrow 1/n > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$ ed è il maggiore dei minoranti perché preso $\epsilon > 0$ si può determinare $\bar{n}$ tale che $1 + \epsilon > 1 + 1/\bar{n}$. Tale $\bar{n}$ si verifica facilmente essere $\bar{n} > 1/\epsilon$.

- n dipari. Questo corrisponde all'esercizio 5.2, però bisogna fare attenzione che gli n accettabili sono solo quelli dispari. L'estremo inferiore, che coincide con il minimo, è 0 e l'estremo superiore è 1 (il massimo non esiste).

In conclusione, siccome $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ e $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$, si ha $\inf A = \min A = 0$ e $\sup A = \max A = 3/2$.

5.7 Esercizio

Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : 9^x + 3^{x+1} - 4 \geq 0\right\}$$

5.7.1 Risoluzione

Bisogna risolvere la disequazione esponenziale $9^x + 3^{x+1} - 4 \geq 0$. Osservando che essa si può riscrivere come $3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 4 \geq 0$, ponendo $3^x = y$ si risolve facilmente la disequazione di secondo grado $y^2 + 3y - 4 \geq 0 \Rightarrow y \leq -4 \vee y \geq 1$, ovvero $3^x \leq -4 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$ e $3^x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$. Quindi, $\inf A = \min A = 0$ e $\sup A = +\infty$.

5.8 Esercizio

Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme $A = \left\{x > 0 : \cos(\frac{1}{x}) = 0\right\}$

5.8.1 Risoluzione

$\cos(\frac{1}{x}) = 0 \Rightarrow 1/x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{N}$ (si noti che se non fosse stato $x > 0$ si sarebbe avuto $k \in \mathbb{Z}$). Quindi $x = \frac{2}{\pi(1+2k)}, k \in \mathbb{N}$. Siccome, al crescere di k, x diminuisce, l'estremo superiore (che è anche massimo) si ha in corrispondenza di $k = 0 \Rightarrow x = 2/\pi$, mentre l'estremo inferiore potrebbe essere 0 (che è certamente un minorante). Verifichiamo che 0 è il maggiore dei minoranti. Preso $\epsilon > 0$ si può determinare $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che $0+\epsilon > \frac{2}{\pi(1+2\bar{k})}$. Infatti, $\epsilon > \frac{2}{\pi(1+2\bar{k})} \Leftrightarrow 1 + 2\bar{k} > \frac{2}{\pi\epsilon} \Leftrightarrow 2\bar{k} > \frac{2}{\pi\epsilon} - 1 \Leftrightarrow \bar{k} > \frac{1}{\pi\epsilon} - \frac{1}{2}$. Quindi $\inf A = 0$, $\nexists \min A$, $\sup A = \max A = 2/\pi$.

5.9 Esercizio

Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme $A = \{a \in \mathbb{R} : a = 2x - y, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, -2 \leq x < 3, -2 \leq y < 3)\}$.

5.9.1 Risoluzione

Si noti che l'insieme A è formato dagli $a \in \mathbb{R}$ tali per cui le rette del fascio improprio $a = 2x - y$ abbiano almeno un punto contenuto nel rettangolo $(x, y) \in [-2; 3[\times[-2; 3[$. Si verifica facilmente (ricorrendo alla geometria analitica) che i valori di a che assicurano tale proprietà sono $-7 < a < 8$. Quindi $\inf A = -7$, $\nexists \min A$, $\sup A = 8$, e $\nexists \max A$.

5.10 Esercizio

Si dimostri che $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\}$ non ammette estremo superiore in $\mathbb{Q}$.

5.10.1 Risoluzione

Anche se non richiesto dall'esercizio, si noti che A è illimitato inferiormente e quindi $\inf A = -\infty$. Per dimostrare quanto richiesto, dimostriamo che se l'estremo superiore M esistesse dovrebbe essere tale per cui $M^3 = 2$ e che $\nexists M \in \mathbb{Q} : M^3 = 2$.

1. Per dimostrare che se M esistesse allora dovrebbe essere 2 dimostraimo che non può essere nè $M^3 < 2$ nè $M^3 > 2$. Supponiamo che sia $M^3 < 2$ e dimostriamo che M non è il minore dei maggioranti o, in altre parole, che scelto $0 < \epsilon < 1$ è possibile determinare $x = M + \epsilon, x \in \mathbb{R}$ tale che $x \in A$. Affinché x appartenga ad A deve essere verificata la disuguaglianza $x^3 < 2 \Leftrightarrow (M + \epsilon)^3 < 2$. Sviluppando i calcoli si ottiene $(M + \epsilon)^3 < 2 \Leftrightarrow M^3 + 3M^2\epsilon + 3M\epsilon^2 + \epsilon^3$, ma essendo $0 < \epsilon < 1$ si ha $\epsilon^3 \leq \epsilon^2 \leq \epsilon$ e quindi $M^3 + 3M^2\epsilon + 3M\epsilon^2 + \epsilon^3 \leq M^3 + \epsilon(3M^2 + 3M + 1)$. Pertanto, affinché sia $(M + \epsilon)^3 < 2$ basta richiedere $M^3 + \epsilon(3M^2 + 3M + 1) < 2$ e questo è verificato per $\epsilon \leq (2 - M^3)/(3M^2 + 3M + 1)$ (si noti che si era supposto $M^3 < 2$, per cui ϵ risulta essere positivo). Se si ripete lo stesso ragionamento assumendo $M^3 > 2$, si arriva a determinare un altro valore di ϵ che assicura nuovamente che M non è il minore dei maggioranti.

2. Dimostriamo ora che $(M^3 = 2) \Rightarrow (M \notin \mathbb{Q})$. Supponiamo per assurdo $M \in \mathbb{Q}$. Allora sarebbe $M = m/n$ con $m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ e m, n primi tra loro, tali che $(m/n)^3 = 2$. In tal caso $m^3 = 2n^3$ e quindi m^3 sarebbe pari e conseguentemente anche m. Quindi m si potrebbe riscrivere come $m = 2k, k \in \mathbb{N}$, per cui risulterebbe $8k^3 = 2n^3 \Rightarrow n^3 = 4k^3$ il che implicherebbe n pari. m ed n sarebbero quindi entrambi multipli di 2, che è contrario alle ipotesi in quanto m ed n sono primi tra loro.

5.11 Esercizio

Si dimostri che $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ non ammette estremi in $\mathbb{Q}$.

5.11.1 Risoluzione

Si proceda come nell'esercizio 5.10, facendo attenzione che scelto $M > 0 : M^2 = 2$ si ha $(\pm M)^2 = 2$.

5.12 Esercizio

Tra tutti i rettangoli di area k^2 determinare quello di perimetro minimo.

5.12.1 Risoluzione

Se x e y sono i due lati, si deve determinare il minimo dell'insieme $A = \{2(x + y) : xy = k^2\}$. A tal fine, ricorriamo alla disuguaglianza

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \quad x, y > 0$$

in cui l'uguaglianza vale se e solo se $x = y$. Tale disuguaglianza è facilmente dimostrabile osservando che $(x-y)^2 \geq 0$, dove l'uguaglianza vale se e solo se $x = y$. Infatti, $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy \geq 2xy \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x + y) \geq 2\sqrt{xy}$, ove nell'ultimo passaggio si è fatto uso dell'ipotesi $x, y > 0$.
Tornando al nostro problema, si ha quindi $2(x + y) \geq 4\sqrt{xy} = 4k$, dove il segno di uguaglianza, che corrisponde al minimo dell'insieme A, vale solo nel caso $x = y = k$. Pertanto il rettangolo richiesto è il quadrato di lato k.

5.13 Esercizio

Determinare tra le coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano la relazione $x^2 + y^2 = 1$ quelle per cui il prodotto xy sia massimo.

5.13.1 Risoluzione

Si noti che $(x - y)^2 \geq 0$, dove il segno di uguaglianza vale solo per $x = y$. Quindi, $x^2 + y^2 \geq 2xy$, ma essendo $x^2 + y^2 = 1$ si ha $xy \leq 1/2$. Ricordando che il segno di uguaglianza vale solo nel caso $x = y$, il massimo del prodotto xy si ha in corrispondenza di $x = y = \sqrt{2}/2$ oppure $x = y = -\sqrt{2}/2$.

6 Principio di induzione

Supponiamo di avere una successione P_n di proposizioni ($n \in \mathbb{N}$). P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ se

(i) P_0 è vera

(ii) $\forall k \in \mathbb{N} : P_k \Rightarrow P_{k+1}$

6.1 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare la formula

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

6.1.1 Risoluzione

- La formula è certamente vera per $n = 0$ in quanto $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1$ e $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$.
- Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$ e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per $n = k+1$. Per ipotesi, quindi, $1+2+4+8+\cdots+2^k = 2^{k+1}-1$. Sommando a entrambi i membri 2^{k+1} si ha $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$. In conclusione, abbiamo dimostrato che se la formula è vera per $n = k$ allora lo è anche per $n = k + 1$.

6.2 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare la formula

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

6.2.1 Risoluzione

- Si noti che in questo caso la formula considera solo $n \geq 1$, per cui la prima verifica va fatta per $n = 1$. In questo caso la formula è certamente vera in quanto $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$ e $\displaystyle\frac{1(1+1)}{2} = 1$.
- Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$ e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per $n = k + 1$. Per ipotesi, quindi, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + k = k(k+1)/2$. Sommando a entrambi i membri $k+1$ si ha $1+2+3+4+5+\cdots+k+(k+1) = k(k+1)/2+(k+1) = (k+1)(k/2+1) = (k+1)(k+2)/2$. Quest'ultima espressione non è altro che la formula calcolata in $n = k + 1$, pertanto abbiamo dimostrato che $P_k \Rightarrow P_{k+1}$.

6.3 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare che per $q \neq 1$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

6.3.1 Risoluzione

- Per $n = 0$ la formula è vera perché $\sum_{k=0}^{0} q^k = 1$ e $\dfrac{1-q^{0+1}}{1-q} = \dfrac{1-q}{1-q} = 1$.

- Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$ e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per $n = k+1$. Per ipotesi, quindi, $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^k = (1-q^{k+1})/(1-q)$. Sommando a entrambi i membri q^{k+1} si ha $1+q+q^2+q^3+\cdots+q^k+q^{k+1} = (1-q^{k+1})/(1-q)+q^{k+1} = (1-q^{k+1}+q^{k+1}-q\cdot q^{k+1})/(1-q) = (1-q^{k+2})/(1-q)$. Quest'ultima espressione non è altro che la formula calcolata in $n = k+1$, pertanto abbiamo dimostrato che $P_k \Rightarrow P_{k+1}$.

6.4 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare le seguenti formule

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$

6.4.1 Risoluzione

Eseguire gli stessi passi degli esercizi precedenti. La (c) si può dimostrare velocissimamente anche in altro modo: quale?

6.5 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n$.

6.5.1 Risoluzione

- Per $n = 0$ si ha $2^0 > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$, che è vera.

- Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$ e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per $n = k+1$. Per ipotesi, quindi, $2^k > k$. Moltiplicando per 2 la disuguaglianza a destra e sinistra $(2 > 0)$ si ha $2^{k+1} > 2k$. Si osservi ora che, $\forall k \geq 1$, è sempre $2k \geq k+1$. Pertanto $2^{k+1} > 2k \geq k+1 \Rightarrow 2^{k+1} > k+1$. Abbiamo quindi dimostrato che $P_k \Rightarrow P_{k+1}$.

6.6 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}, a \geq -1 : (1+a)^n \geq 1+na$ (disuguaglianza di Bernoulli).

6.6.1 Risoluzione

- Per $n = 0$ si ha $(1 + a)^0 \geq 1 + 0 \Leftrightarrow 1 \geq 1$, che è vera.
- Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$ e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per $n = k+1$. Per ipotesi, quindi, $(1+a)^k \geq 1+ka$. Moltiplicando per $(1 + a)$ la disuguaglianza a destra e sinistra $(1 + a > 0)$ si ha $(1 + a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a) = 1+a+ka+ka^2 = 1+(k+1)a+ka^2$. Si osservi ora che, $\forall k \geq 0$, è sempre $ka^2 \geq 0$ e quindi $1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$. Sfruttando quest'ultima disuguaglianza si ha quindi $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$, ossia $P_k \Rightarrow P_{k+1}$.

6.7 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ valgono i seguenti raffinamenti della disuguaglianza di Bernoulli:

$$\text{(a)} \quad (1 + a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 \qquad a \geq 0$$

$$\text{(b)} \quad (1 + a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3 \quad a \geq -1$$

6.7.1 Risoluzione

Si seguano gli stessi passi dell'esercizio 6.6, osservando nel caso (a) che $a^3 \geq 0$ e nel caso (b) $a^4 \geq 0$.

6.8 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ il numero $n^2 + n$ è pari.

6.8.1 Risoluzione

Per $n = 1$ è certamente vero: $1^2 + 1 = 2$, pari.
Assumendo che sia vero per $n = k$, dimostriamo che lo è anche per $n = k+1$. Se k^2+k è pari, allora la proposizione valutata in $n = k+1$ diventa $(k+1)^2+(k+1) = k^2+3k+2 = (k^2 + k) + 2(k + 1)$, ma questo è un numero pari essendo pari sia $k^2 + k$ (per ipotesi) sia $2(k + 1)$.

6.9 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare l'uguaglianza delle formule

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

6.9.1 Risoluzione

Si dimostri dapprima che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (vedi esercizio 6.2) e quindi che $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

6.10 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

6.10.1 Risoluzione

Si proceda come noto.

7 Numeri complessi (forma cartesiana)

Definizioni utili per gli esercizi:

- Chiamiamo numero complesso z la coppia ordinata (x, y) tale che $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Scriveremo $z \in \mathbb{C}$.
- Per definizione: $0 := (0, 0)$, $1 := (1, 0)$, $i := (0, 1)$.
- Definite le operazioni di somma, differenza, prodotto e divisione tra numeri complessi, si verifica facilmente che $i^2 = -1$.
- Parte reale di z: $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x, y) = x$; parte immaginaria di z: $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(x, y) = y$.
- Forma cartesiana equivalente. $z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = (x, 0) + i \cdot (y, 0) = x + iy$
- Complesso coniugato di $z \in \mathbb{C}$. $\overline{z} := (x, -y) = x - iy$
- Modulo di $z \in \mathbb{C}$. $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$

7.1 Esercizio

Dati $z = 1 + 2i$ e $w = 2 - i$, determinare $z + w$, $w - z$, zw, $\bar{z}w$, $|z|$, $|w|$, $z\bar{z}$, z^2, z^2w, z/w, w/z, z^2w.

7.1.1 Risoluzione

- $z + w = (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i$
- $w - z = (2 - i) - (1 + 2i) = 1 - 3i$
- $zw = (1 + 2i) \cdot (2 - i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 2 + 3i + 2 = 4 + 3i$
- $\bar{z}w = (1 - 2i) \cdot (2 - i) = 2 - i - 4i + 2i^2 = 2 - 5i - 2 = -5i$
- $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
- $|w| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$
- $z\bar{z} = (1 + 2i) \cdot (1 - 2i) = 1^2 - 4i^2 = 1 + 4 = 5$
- $z^2 = (1 + 2i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2i + 4i^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$
- $z^2w = (1 + 2i)^2 \cdot (2 - i) = (-3 + 4i) \cdot (2 - i) = -6 + 3i + 8i - 4i^2 = -2 + 11i$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{1 + 2i}{2 - i} = \dfrac{1 + 2i}{2 - i} \cdot \dfrac{2 + i}{2 + i} = \dfrac{2 + i + 4i + 2i^2}{4 - i^2} = \dfrac{5i}{5} = i$
- $\dfrac{w}{z} = \dfrac{2 - i}{1 + 2i} = \dfrac{2 - i}{1 + 2i} \cdot \dfrac{1 - 2i}{1 - 2i} = \dfrac{2 - 4i - i + 2i^2}{1 - 4i^2} = \dfrac{-5i}{5} = -i$, oppure si noti che $\dfrac{w}{z} = \dfrac{1}{\frac{z}{w}} = \dfrac{1}{i} = -i$

7.2 Esercizio

Sia $w = z + z\bar{z} - z^2 + 2i + \bar{z} - 2(\mathrm{Im}(z))^2$. Determinare il luogo geometrico dei punti del piano complesso (piano di Gauss) tali che $\mathrm{Re}(w) = 3$ e $\mathrm{Im}(w) = 0$.

7.2.1 Risoluzione

$w = z + z\bar{z} - z^2 + 2i + \bar{z} - 2(\mathrm{Im}(z))^2 = x + iy + x^2 + y^2 - (x^2 + 2xyi - y^2) + 2i + x - iy - 2y^2 = 2x - 2xyi + 2i = 2x + (-2xy + 2)i$. Pertanto:
$\mathrm{Re}(w) = 3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 3/2$, ossia retta verticale.
$\mathrm{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow -2xy + 2 = 0 \Leftrightarrow xy = 1$, ossia iperbole equilatera riferita ai propri asintoti.

7.3 Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$2iz + 3 - 4i = 0$$

7.3.1 Risoluzione

Il modo più veloce è di ricavare z seguendo il procedimento tipico delle equazioni di primo grado. Si ha quindi $2iz = -3+4i$ da cui $z = (-3+4i)/2i$ e quindi (motiplicando numeratore e denominatore per i) $z = 2+3i/2$.
Un altro modo consiste nel sostituire $z = x+iy$ e separare la parte reale dell'equazione da quella immaginaria, ottenendo in tal modo un sistema di due equazioni in due incognite. Nel caso in esame si ha quindi $2i(x+iy)+3-4i = 0 \Leftrightarrow 2ix-2y+3-4i = 0 \Leftrightarrow (3-2y)+(2x-4)i = 0$, ossia:

$$\begin{cases} 3-2y = 0 \\ 2x-4 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3/2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad z = 2+3i/2$$

Si noti che, se ci si limita ai numeri complessi in forma cartesiana, questo ultimo metodo risulta talvolta l'unico o quantomeno il più efficace (si veda l'esercizio seguente).

7.4 Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ le equazioni

$$z^2-4 = 0 \qquad\qquad z^2+4 = 0$$

7.4.1 Risoluzione

$z^2-4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm 2$.
$z^2+4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Rightarrow z = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{2} = \pm i\sqrt{2}$.

7.5 Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^2-5-12i = 0$$

7.5.1 Risoluzione

Risolvendo classicamente l'equazione di secondo grado si ottiene $z = \pm\sqrt{5+12i}$. Tuttavia, se ci limitiamo alla forma cartesiana dei numeri complessi, $\sqrt{5+12i}$ non è facilmente determinabile (lo sarebbe introducendo la forma trigonometrica o esponenziale dei numeri complessi). Tornando all'equazione iniziale e introducendo $z = x+iy$ si ha quindi $z^2-5-12i = 0 \Leftrightarrow x^2+2xyi-y^2 = 5+12i$, ossia

$$\begin{cases} x^2-y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 6/y \\ 36/y^2-y^2 = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 6/y \\ y^4+5y^2-36 = 0 \end{cases}$$

$y^4+5y^2-36 = 0 \Rightarrow y^2 = -9 \vee y^2 = 4$ ma si noti che $x, y \in \mathbb{R}$ e quindi $y^2 = -9$ non è accettabile. $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 3$ Quindi, $z^2-5-12i = 0 \Rightarrow z = \pm(3+2i)$.

7.6 Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$iz^2 - z - 3 + i = 0$$

7.6.1 Risoluzione

Applicando la fomula per le equazioni di secondo grado si ottiene

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(i)\cdot(-3+i)}}{2i} = \frac{1 \pm \sqrt{1+12i+4}}{2i} = \frac{1 \pm \sqrt{5+12i}}{2i}$$

Siccome dall'esercizio 7.5 è noto il valore di $\sqrt{5+12i}$, le soluzioni sono

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5+12i}}{2i} = \frac{1 \pm (3+2i)}{2i} \Rightarrow z = (1-2i) \vee z = (-1+i)$$

Si noti che, in generale, $\sqrt{\Delta}$ nell'equazione di secondo grado in z non è noto e il suo calcolo richiede la soluzione di un sistema nonlineare di due equazioni in due inconite. Pertanto, il lavoro richiesto è equivalente a sostituire direttamente nell'equazione di partenza $z = x + iy$. Così facendo si ottiene $iz^2 - z - 3 + i = 0 \Leftrightarrow i(x^2 + 2xyi - y^2) - x - iy - 3 + i \Leftrightarrow (-2xy - x - 3) + (x^2 - y^2 - y + 1)i = 0$, ossia

$$\begin{cases} -2xy - x - 3 = 0 \\ x^2 - y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3/(2y+1) \\ (-3/(2y+1))^2 - y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \ldots$$

Che porta, come si verifica facilmente, a $z = (1-2i) \vee z = (-1+i)$.

7.7 Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$iz^2 - z\bar{z} + 9 + 3i = 0$$

7.7.1 Risoluzione

L'equazione diventa $i(x^2 + 2xyi - y^2) - (x^2 + y^2) + 9 + 3i = 0$, da cui $-(x^2 + y^2 + 2xy - 9) + (x^2 - y^2 + 3)i = 0$, ovvero

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 9 = 0 \\ x^2 - y^2 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 9 \\ (x+y)(x-y) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm 3 \\ (x+y)(x-y) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

da cui $z = \pm(1+2i)$.

7.8 Esercizio

Calcolare, in $\mathbb{C}$, le radici terze di i.

7.8.1 Risoluzione

Il problema si riduce alla soluzione dell'equazione $z^3 = i$, ovvero
$(x+iy)^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 + y^3i^3 - i = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3 - 1)i = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 0 \\ 3x^2y - y^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima si ha $x(x^2 - 3y^2) = 0$, il che implica $x = 0$ oppure $x = \pm\sqrt{3}y$ che, sostituiti nella seconda danno rispettivamente $y = -1$ e $y = 1/2$. Le tre radici sono quindi $z_1 = -i$, $z_2 = \sqrt{3}/2 + i/2$ e $z_3 = -\sqrt{3}/2 + i/2$.

7.9 Esercizio

Calcolare, in $\mathbb{C}$, le radici quarte di i.

7.9.1 Risoluzione

Si proceda come nell'esercizio precedente e si ricordi, o tramite il triangolo di Tartaglia o tramite il binomio di Newton, che $(a+b)^4 = \ldots$.

7.10 Esercizio

Calcolare, in $\mathbb{C}$, le radici quarte di -4.

7.10.1 Risoluzione

Bisogna risolvere l'equazione $z^4 = -4$, che implica $z^2 = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$. Da $z^2 = 2i$ si ottiene $x^2 + 2xyi - y^2 - 2i = 0 \Rightarrow z = \pm(1+i)$. Da $z^2 = -2i$ si ottiene $x^2 + 2xyi - y^2 + 2i = 0 \Rightarrow z = \pm(1-i)$. Le quattro radici sono quindi $z = \pm(1+i)$ e $z = \pm(1-i)$.

7.11 Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$\frac{z^3+1}{z^3-1} = \frac{1}{i}$$

.

7.11.1 Risoluzione

Dopo aver posto $z^3 \neq 1$, si osservi che $1/i = -i$ e quindi l'equazione si riduce a $z^3 + 1 = -i(z^3 - 1)$, da cui si procede come al solito...

7.12 Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$|z-1| = |z+1|$$

.

7.12.1 Risoluzione

Si osservi che $(z-1)=(x-1)+iy$ e quindi $|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$. Analogamente, $|z+1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$, per cui si ottiene $x=0$ (asse delle ordinate). Intuitivamente, l'esercizio consiste nel trovare i punti del piano che hanno ugual distanza dal punto $(1;0)$ e $(-1;0)$. Evidentemente, questo è l'asse del segmento che ha per estremi tali punti, ossia proprio la retta $x=0$.

7.13 Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ e rappresentare graficamente la soluzione della disequazione

$$z+\bar{z}\leq |z|^2$$

.

7.13.1 Risoluzione

Si ha $x+iy+x-iy\leq x^2+y^2$, ovvero $x^2+y^2-2x\geq 0$. Questi sono tutti i punti del piano esterni o coincidenti con la circonferenza di centro $C(1;0)$ e raggio 1.

Richiami utili per gli esercizi:

- Forme indeterminate: $+\infty-\infty$, $0\cdot(\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, 0^0, $(\pm\infty)^0$ e $1^{\pm\infty}$.
- Principali limiti notevoli (si lascia allo studente la loro dimostrazione):

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\log a},\quad a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a,\quad a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k,\quad k\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

8 Verifica di limiti

8.1 Esercizio

Si verifichi, tramite la definizione di limite, che

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x-1}=3$$

8.1.1 Risoluzione

Scelto $\epsilon > 0$ si ottiene $1 - \epsilon/2 < x < 1 + \epsilon/2$

8.2 Esercizio

Si verifichi, tramite la definizione di limite, che

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

8.2.1 Risoluzione

Scelto $\epsilon > 0$ si ottiene $x < -1/\epsilon$

8.3 Esercizio

Si verifichi, tramite la definizione di limite, che

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{4x - x^2 - 4} = -\infty$$

8.3.1 Risoluzione

Scelto $M > 0$ si ottiene $2 - 1/\sqrt{M} < x < 2 + 1/\sqrt{M}$.

8.4 Esercizio

Si verifichi, tramite la definizione di limite, che

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

8.4.1 Risoluzione

Scelto $M > 0$ si ottiene $x < -\sqrt[3]{M}$.

9 Calcolo di limiti

9.1 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 5}{2x^2 + 1}$$

9.1.1 Risoluzione

-1.

9.2 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

9.2.1 Risoluzione

$+\infty$.

9.3 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

9.3.1 Risoluzione

-1.

9.4 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

9.4.1 Risoluzione

2.

9.5 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + x^2 - x}{x^2 + 2x}$$

9.5.1 Risoluzione

$-1/2$.

9.6 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 + x$$

9.6.1 Risoluzione

$+\infty$.

9.7 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 + x$$

9.7.1 Risoluzione

$+\infty$.

9.8 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^5 - x^3 + x + 1}{3x^3 + 1}$$

9.8.1 Risoluzione

$+\infty$.

9.9 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 2}{1 + x - 3x^3}$$

9.9.1 Risoluzione

$-1/3$.

9.10 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x}{3x^3 + 1}$$

9.10.1 Risoluzione

0.

9.11 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

9.11.1 Risoluzione

0.

9.12 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1} - \sqrt{2x^2-x-1}$$

9.12.1 Risoluzione

$1/(2\sqrt{2})$.

9.13 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2-1} - \sqrt{2x^2-x-1}$$

9.13.1 Risoluzione

$-1/(2\sqrt{2})$.

9.14 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$$

9.14.1 Risoluzione

0.

9.15 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+\cos(e^x)}{4x}$$

9.15.1 Risoluzione

$+\infty$.

9.16 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

9.16.1 Risoluzione

$\nexists$ perché il limite destro vale $+\infty$ e quello sinistro $-\infty$.

9.17 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$$

9.17.1 Risoluzione

$\nexists$ perché il limite destro vale $+\infty$ e quello sinistro 0.

9.18 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{3\sin^2 x + \sin x - 4}{\cos x}$$

9.18.1 Risoluzione

Si noti che $3\sin^2 x + \sin x - 4 = (\sin x - 1)(3\sin x + 4)$, da cui il limite 0.

9.19 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to +\alpha} \frac{\cos x - \cos\alpha}{x - \alpha}$$

9.19.1 Risoluzione

Ricordando che $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$, si ha $-\sin\alpha$.

9.20 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

9.20.1 Risoluzione

1/2

9.21 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to -2} \frac{e^{x+2} - 1}{x+2}$$

9.21.1 Risoluzione

1

9.22 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x+1}-1}{5x}$$

9.22.1 Risoluzione

$1/25$

9.23 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x-3}{x+4}\right)^{\frac{x^2-1}{2x}}$$

9.23.1 Risoluzione

$1/\sqrt{e^7}$

9.24 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{\sqrt[6]{x^2+1}-1}$$

9.24.1 Risoluzione

6

9.25 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[7]{x}-1}$$

9.25.1 Risoluzione

Dopo aver posto $y = x - 1$, si ottiene $7/5$

9.26 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\tan x}{\log(1+3x^2)}$$

9.26.1 Risoluzione

1/3

9.27 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(2^x-3^x)}{1-\cos(3x)}$$

9.27.1 Risoluzione

$\frac{2}{9}\log(2/3)$

9.28 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} x^{x/(1-x)}$$

9.28.1 Risoluzione

$1/e$

9.29 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}|x|^{1/x}$$

9.29.1 Risoluzione

$\nexists$ perché il limite destro vale 0 e quello sinistro $+\infty$.

Principali limiti notevoli di successioni:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a>1 \\ 1 & \text{se} \quad a=1 \\ 0 & \text{se} \quad -1<a<1 \\ \nexists & \text{se} \quad a\le -1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad b>0 \\ 1 & \text{se} \quad b=0 \\ 0 & \text{se} \quad b<0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1 \qquad a>0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{b/n} = 1 \qquad \forall b\in\mathbb{R}$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^b} = 0 \qquad b > 0$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \qquad a > 1, b > 0$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad a > 1, \quad n! := n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1, \quad 0! := 1, \quad 1! := 1$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

10 Verifica di limiti di successioni

Per la verifica di limite di successione si utilizzano le stesse tecniche della verifica del limite di funzione con la semplificazione che $n \to +\infty$ e quindi si tratterà sempre di trovare un $\bar{x}$ tale che $\forall n > \bar{x}$ si abbia che...

10.1 Esercizio

Si verifichi, tramite la definizione di limite, che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2}$$

10.1.1 Risoluzione

Scelto $\epsilon > 0$ si ottiene $\bar{x} = 5/(4\epsilon) - 5/2$ tale che $\forall n > \bar{x}$ si ha $\left|\frac{n}{2n+5} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$.

10.2 Esercizio

Si verifichi, tramite la definizione di limite, che

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 - 1 = +\infty$$

10.2.1 Risoluzione

Scelto $M > 0$ si ottiene $\bar{x} = \sqrt{M+1}$ tale che $\forall n > \bar{x}$ si ha $n^2 - 1 > M$.

10.3 Esercizio

Si verifichi, tramite la definizione di limite, che

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - n^2 = -\infty$$

10.3.1 Risoluzione

Scelto $M > 0$ si ottiene $\bar{x} = \sqrt{M+1}$ tale che $\forall n > \bar{x}$ si ha $1 - n^2 < -M$.

11 Calcolo di limiti di successioni

Per il calcolo di limite di successione si utilizzano le stesse tecniche di calcolo del limite di funzione, ai quali si rimanda per una trattazione completa dei vari casi. Qui sono riportati solo alcuni esempi nei quali ci si riconduce all'utilizzo dei limiti notevoli per successioni e alle tecniche classiche.

11.1 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} e^n + 2^n - 3^n$$

11.1.1 Risoluzione

$-\infty$.

11.2 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\sqrt{\pi}}$$

11.2.1 Risoluzione

$+\infty$.

11.3 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-e}$$

11.3.1 Risoluzione

0.

11.4 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\pi}}$$

11.4.1 Risoluzione

1.

11.5 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\pi n^e}$$

11.5.1 Risoluzione

1.

11.6 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}$$

11.6.1 Risoluzione

-1.

11.7 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$$

11.7.1 Risoluzione

1.

11.8 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n+1)}{(\log n)^2}$$

11.8.1 Risoluzione

0.

11.9 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-\log n}{n!-n^n}$$

11.9.1 Risoluzione

0.

11.10 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^{(n+1)/2}}$$

11.10.1 Risoluzione

Dopo aver osservato che $\dfrac{2^n}{3^{(n+1)/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ si ha $+\infty$.

11.11 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$$

11.11.1 Risoluzione

Dopo aver osservato che $\sqrt[n]{2^n+3^n} = \sqrt[n]{3^n}\,\sqrt[n]{1+(2/3)^n}$ si ha 3.

11.12 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{3758}-n!}{e^n-n^{123}}$$

11.12.1 Risoluzione

$-\infty$.

11.13 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n\cdot 3^{n+1}+n^5+1)\cdot n!}{(3^n+2^n)\cdot(n+1)!}$$

11.13.1 Risoluzione

3.

11.14 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^3}{n}$$

11.14.1 Risoluzione

0.

11.15 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n-2} - 2^{\sqrt{n^2-1}}$$

11.15.1 Risoluzione

Dopo aver raccolto $2^{n-2}(1 - 2^{\sqrt{n^2-1}-(n-2)})$ e notato che $[\sqrt{n^2-1} - (n-2)] \to 2$ per $n \to +\infty$, si ottiene $-\infty$.

11.16 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}$$

11.16.1 Risoluzione

e.

11.17 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^{n}$$

11.17.1 Risoluzione

e^2.

11.18 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-1} - 2n^{-2}}{3n^{-3} - 4n^{-4}}$$

11.18.1 Risoluzione

$+\infty$.

11.19 Esercizio

Determinare, al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(e + \frac{1}{n^\alpha})^{n^2}}{e^{n^2}}$$

11.19.1 Risoluzione

$\alpha = 2 \Rightarrow e^{1/e}$, $\alpha = 2 \Rightarrow e^0 = 1$, $0 < \alpha < 2 \Rightarrow +\infty$.

11.20 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin x}$$

11.20.1 Risoluzione

n.

11.21 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x}$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$.

11.21.1 Risoluzione

n pari. $y = x - \pi \Rightarrow \lim_{x\to\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(ny + n\pi)}{\sin(y+\pi)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(ny)}{-\sin y} = -n.$

n dispari. $\lim_{y\to 0} \frac{\sin(ny + n\pi)}{\sin(y+\pi)} = n.$

11.22 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}[1+(-1)^n]\left(\frac{n+1}{n}\right)^n+[1-(-1)^n]\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

11.22.1 Risoluzione

Si noti che per n pari si ottiene $\lim_{n\to+\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2e$ mentre per n dispari si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e}$.

Essendo i due limiti (su due restrizioni) diversi tra loro, la successione non ammette limite.

11.23 Esercizio

Dimostrare che il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1}\cos x$$

non esiste, esibendo due successioni $\{a_n\}, \{b_n\} \to +\infty$ tali che $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$.

11.23.1 Risoluzione

Per esempio se si scelgono $a_n = \pi/2 + 2n\pi$ e $b_n = 2n\pi$ si ottiene $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = 1$.

12 Ordine di infinito e di infinitesimo

Richiami di teoria utili per gli esercizi:

- $f(x)$ si dice *infinitesimo* per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.
- $f(x)$ si dice *infinito* per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = (\pm)\infty$.
- Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni *infinitesime* per $x \to x_0$. Allora il limite del loro

rapporto può dare una delle seguenti possibilità:

1. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad \Rightarrow$ f è infinitesimo di ordine superiore rispetto a g

2. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0, l \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow$ f è infinitesimo dello stesso ordine rispetto a g

3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = (\pm)\infty \qquad \Rightarrow$ f è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a g

4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \nexists \qquad \Rightarrow$ f e g non sono confrontabili

- Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni *infinite* per $x \to x_0$. Allora il limite del loro rapporto può dare una delle seguenti possibilità:

  1. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad \Rightarrow$ f è infinito di ordine inferiore rispetto a g

  2. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0, l \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow$ f è infinito dello stesso ordine rispetto a g

  3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = (\pm)\infty \qquad \Rightarrow$ f è infinito di ordine superiore rispetto a g

  4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \nexists \qquad \Rightarrow$ f e g non sono confrontabili

- Il simbolo $o(\cdot)$ ("o piccolo di ..."). Diremo (impropriamente) che $f(x) = o(g(x))$ se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, ovvero $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$.

- Il simbolo $O(\cdot)$ ("o grande di ..."). Diremo (impropriamente) che $f(x) = O(g(x))$ se il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è definitivamente limitato per $x \to x_0$.

- Il simbolo $\sim$ ("asintotico a ..."). Diremo che $f(x) \sim g(x)$ se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, ovvero $f(x)$ è un infinitesimo o infinito dello stesso ordine rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$.

12.1 Esercizio

Si verifichi che

- $\sin x \sim x$ per $x \to 0$

- $\tan x \sim x$ per $x \to 0$
- $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$
- $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$
- $e^{-x^2} - 1 \sim -x^2$ per $x \to 0$
- $\log(1-\sin x) \sim -x$ per $x \to 0$
- $\sqrt{x^2-1} \sim x$ per $x \to +\infty$
- $\sqrt{x^2-1} + x \sim 2x$ per $x \to +\infty$
- $\log x + x \sim x$ per $x \to +\infty$
- $x^2 + x + \sqrt{x} \sim x^2$ per $x \to +\infty$
- $x^2 + x + \sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ per $x \to 0$

12.1.1 Risoluzione

Si calcolino i limiti come da definizione.

12.2 Esercizio

Utilizzando il simbolo di uguaglianza asintotica $\sim$ determinare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n - \log n + (-1)^n + \frac{1}{n}}{n^2 + 10\sin n - \frac{1}{\log n}}$$

12.2.1 Risoluzione

0.

12.3 Esercizio

Utilizzando il simbolo di uguaglianza asintotica $\sim$ determinare

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin^2 x}{x^3 \log(1+x)}$$

12.3.1 Risoluzione

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin^2 x}{x^3 \log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 \cdot x^2}{x^3 \cdot x} = \frac{1}{2}$

12.4 Esercizio

Determinare l'ordine di infinitesimo $a > 0$ per $x \to 0$, rispetto all'infinitesimo campione x, di $f(x) = x^2 + 2\sin(3x^3) + 1 - e^{-x^2}$ e la funzione $g(x) = kx^a$ tale che $f(x) \sim g(x)$ (parte principale di $f(x)$).

12.4.1 Risoluzione

$\sin(3x^3) \sim 3x^3$ e $1 - e^{-x^2} \sim x^2$, quindi $x^2 + 2\sin(3x^3) + 1 - e^{-x^2} \sim x^2 + 6x^3 + x^2 = 2x^2 + o(x^3) \sim 2x^2$. Pertanto la parte principale è $2x^2$ e l'ordine è 2.

13 Funzioni continue

Richiami di teoria utili per gli esercizi:

- Definizione di continuità nel punto x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Continuità da sinistra nel punto x_0: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- Continuità da destra nel punto x_0: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- Una funzione si dice continua su un intervallo $[a; b]$ se è continua in ogni punto dell'intervallo $]a; b[$, continua da sinistra in $x = a$ e continua da destra in $x = b$.
- Discontinuità di prima specie: limite destro e sinistro finiti ma diversi tra loro. Salto $S = \left| \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \right|$.
- Discontinuità di seconda specie: almeno uno dei due limiti (destro o sinistro) o è infinito o non esiste.
- Discontinuità di terza specie (o eliminabile): il limite destro e sinistro coincidono e sono finiti (il limite esiste finito), ma $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$.
  In tal caso la esiste un prolungamento per continuità $g(x)$ della $f(x)$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

13.1 Esercizio

Si verifichi la continutà o meno della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x\cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

13.1.1 Risoluzione

$f(x)$ è continua perchè $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$.

13.2 Esercizio

Si verifichi la continutà o meno della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2 - e^{1/x}}$$

13.2.1 Risoluzione

$x = 0$: discontinuità di prima specie essendo $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1/2$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ (salto $S = 1/2$).
$x = 1/\log 2$: discontinuità di seconda specie essendo $\lim_{x \to (1/\log 2)^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to (1/\log 2)^+} f(x) = +\infty$.

13.3 Esercizio

Determinare per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & x > 1 \end{cases}$$

è continua in $x = 1$.

13.3.1 Risoluzione

$a = 1$.

13.4 Esercizio

Determinare per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + ax)}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

è continua in $x = 0$.

13.4.1 Risoluzione

$a = 2$.

13.5 Esercizio

Studiare la continuità della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

.

13.5.1 Risoluzione

Discontinuità eliminabile in $x = 2$. Il prolungamento è

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} & x \neq 2 \\ \\ -1 & x = 2 \end{cases}$$

13.6 Esercizio

Dire quante soluzioni ammette l'equazione $e^x + x^3 = 0$ e determinare un intervallo ragionevole in cui esse sono localizzate.

13.6.1 Risoluzione

$e^x = -x^3$, una sola soluzione, $x_0 \in [-1; 0]$.

14 Serie numeriche

Richiami sulle serie utili ai fini degli esercizi.

- Chiamiamo (con abuso di notazione) serie di termine generale x_n l'espressione $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{h=0}^{n} x_h$. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ si dice:
  - convergente se $\lim_{n\to+\infty} \sum_{h=0}^{n} x_h = l \in \mathbb{R}$
  - divergente positivamente se $\lim_{n\to+\infty} \sum_{h=0}^{n} x_h = +\infty$
  - divergente negativamente se $\lim_{n\to+\infty} \sum_{h=0}^{n} x_h = -\infty$
  - indeterminata se $\nexists \lim_{n\to+\infty} \sum_{h=0}^{n} x_h$

- Studiare il carattere di una serie significa determinare se essa è convergente, divergente o indeterminata, ossia uno dei quattro casi precedenti.
- Condizione *necessaria* affiché una serie converga è che $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Si noti che tale condizione, in generale, non è sufficiente a garantire la convergenza (per esempio la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ non è convergente).
- Serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Si ha
  (a) $|x| < 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, ossia la serie è convergente
  (b) $x \geq 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = +\infty$, ossia la serie è positivamente divergente
  (c) $x \leq -1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ è indeterminata
- La serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è positivamente divergente.
- Criteri di convergenza per serie a **termini positivi**. Una serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ si dice a termini positivi se $x_n \geq 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.
  (a) Criterio del **confronto**. Siano x_n e y_n due serie a termini positivi e tali che $x_n \leq y_n \;\; \forall n > \bar{n} \in \mathbb{N}$. Allora:
  1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ convergente $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ convergente
  2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ divergente $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ divergente

  Corollario. È immediato verificare che se $x_n \sim y_n$ per $n \to +\infty$ allora le serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ hanno lo stesso carattere.

  (b) Criterio della **radice**. Sia x_n una serie a termini positivi. Allora:
  1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l < 1 \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ convergente

2. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l > 1 \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ divergente

3. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1 \quad \Rightarrow$ non si può dire nulla

(c) Criterio del **rapporto**. Sia x_n una serie a termini positivi. Allora:

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1 \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ convergente
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l > 1 \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ divergente
3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 \quad \Rightarrow$ non si può dire nulla

(d) Criterio di **condensazione**. Sia x_n una serie a termini positivi con x_n decrescente. Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ è convergente se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x_{2^n}$ è convergente.

- Dal criterio di condensazione (o, in modo più articolato, utilizzando il criterio del confronto per serie a termini positivi — si veda l'esercizio 6.21 a pagina 307 dell'eserciziario, Volume 1, parte seconda), si verifica immediatamente che

1. $\lambda > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda}$ convergente
2. $\lambda \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda}$ positivamente divergente

- Criteri di convergenza per serie a **termini di segno variabile**.

(a) **Convergenza assoluta**. Ogni serie assolutamente convergente è convergente. (Nota: una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ si dice assolutamente convergente se la serie dei valori assoluti $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ è convergente)

(b) Criterio di **Leibniz**. Se $\{x_n\}$ è una successione reale a termini positivi decrescente e infinitesima ($\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$), allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x_n$ è convergente e si ha che $|s_n - S| \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, essendo s_n l'n-esimo termine della successione delle somme parziali $s_n = \sum_{h=0}^{n} (-1)^h x_h$.

14.1 Esercizio

Utilizzando il criterio del confronto, si dimostri che per la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ si ha

$$
\begin{array}{lll}
\alpha > 1 \quad \forall\beta & \Rightarrow & \text{serie convergente} \\
\alpha = 1 \quad \beta > 1 & \Rightarrow & \text{serie convergente} \\
\alpha = 1 \quad \beta \le 1 & \Rightarrow & \text{serie positivamente divergente} \\
\alpha < 1 \quad \forall\beta & \Rightarrow & \text{serie positivamente divergente}
\end{array}
$$

14.1.1 Risoluzione

Sia $\alpha < 1$. Scelto $\epsilon > 0$ in modo che $\alpha + \epsilon < 1$, $\forall\beta \in \mathbb{R}$ si ha $(\log n)^\beta / n^\epsilon \to 0$ per $n \to +\infty$ e quindi si avrà definitivamente $(\log n)^\beta < n^\epsilon$, che implica

$$\frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} > \frac{1}{n^{\alpha+\epsilon}}.$$

Siccome $1/n^{\alpha+\epsilon}$ diverge, per il criterio del confronto la serie data diverge.
Sia $\alpha > 1$. Scelto $\epsilon > 0$ in modo che $\alpha - \epsilon > 1$, $\forall\beta \in \mathbb{R}$ si ha $(\log n)^\beta n^\epsilon \to +\infty$ per $n \to +\infty$ e quindi si avrà definitivamente $(\log n)^\beta > n^{-\epsilon}$, che implica

$$\frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} < \frac{1}{n^{\alpha-\epsilon}}.$$

Siccome $1/n^{\alpha-\epsilon}$ converge, la serie data converge.
Sia $\alpha = 1$. Utilizzando il criterio di condensazione si ha $2^n x_{2^n} = 2^n \frac{1}{2^n (\log 2^n)^\beta} = \frac{1}{n^\beta (\log 2)^\beta}$, ovvero la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n x_{2^n} = \frac{1}{(\log 2)^\beta} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\beta}$ converge solo nel caso $\beta > 1$ mentre diverge per $\beta \le 1$.

14.2 Esercizio

Calcolare la somma delle seguenti serie

$$
a)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} \qquad c)\ \sum_{n=2}^{+\infty} e\pi^{-n} \qquad d)\ \sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^{-n} \qquad e)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-5)^n}{\pi^n}
$$

$$
f)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-2} \qquad g)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi + e^n}{e^{n+2}} \qquad h)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi + e^n}{\pi^{n+2}}
$$

14.2.1 Risoluzione

a) 2 *b)* 1 *c)* $\frac{e}{\pi(\pi - 1)}$ *d)* $+\infty$ *e)* indeterminata *f)* $\frac{\pi}{\pi + e}$

g) $+\infty$ *h)* dopo aver osservato che $\frac{\pi + e^n}{\pi^{n+2}} = \frac{1}{\pi^{n+1}} + \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{e}{\pi}\right)^n$ si proceda come nei casi precedenti.

14.3 Esercizio

Calcolare la somma delle seguenti serie (telescopiche)

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \qquad c)\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \qquad d)\ \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)}$$

14.3.1 Risoluzione

a) $3/4$, infatti $\dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right]$

b) $1/2$. Nel caso la successione $\{x_n\}$ tenda a x per $n \to +\infty$, si ha che $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n - x_{n+1} = x_1 - x$. Essendo $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2(2n-1)} - \dfrac{1}{2(2n+1)} = x_n - x_{n+1}$, si arriva facilmente al risultato.

c) $1/4$, infatti $\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2} = x_n - x_{n+1}$

d) $-1/3$, infatti $\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)} = \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} = x_n - x_{n+1}$

14.4 Esercizio

Determinare il carattere delle seguenti serie (a termini positivi)

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+2007} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2007n+2006} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2007^n}{n!} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{2007}}{2007^n}$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^3}{n^3(3n)!} \qquad g)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \qquad h)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad i)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos n}{n^2}$$

14.4.1 Risoluzione

a) $x_n \to 0$ però $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n+2007} = \sum_{n=2008}^{+\infty}\dfrac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n} - \sum_{n=1}^{2007}\dfrac{1}{n}$, ma l'ultimo membro dopo l'uguaglianza diverge positivamente. Si può anche notare che $\dfrac{1}{n+2007} \sim \dfrac{1}{n}$, da cui la divergenza.

b) $x_n \to 0$ ma la serie diverge essendo $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2007n+2006} = \dfrac{1}{2007}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n+2006/2007} > \dfrac{1}{2007}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2007}\sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ e quindi diverge. Alternativamente, tramite in confronto asintotico, bastava notare che $\dfrac{1}{2007n+2006} \sim \dfrac{1}{2007n}$.

c) $x_n \to 0$, converge per il criterio del rapporto.

d) $x_n \to 0$, converge per il criterio del rapporto (o della radice).
e) $x_n \to 0$, converge per il criterio del rapporto, essendo $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n = 1/e < 1$.
f) $x_n \to 0$, converge per il criterio del rapporto, essendo $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n = 1/27 < 1$.
g) $x_n \to +\infty$ quindi diverge positivamente. Si sarebbe arrivati allo stesso risultato applicando il criterio del rapporto, ottenendo $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n = 4 > 1$.
h) $x_n \to 0$ converge per il criterio della radice, essendo $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1/e < 1$.
i) $x_n \to 0$ e $0 < \dfrac{1-\cos n}{n^2} < \dfrac{2}{n^2}$ quindi converge per il criterio del confronto.

14.5 Esercizio

Discutere la convergenza semplice o assoluta delle seguenti serie (a termini non necessariamente positivi)

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi/2+n\pi)}{n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3n!+n}{2n!+n^{2007}} \qquad f)\ \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n\log n} \qquad g)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(\log n)^{2007}}$$

14.5.1 Risoluzione

a) $x_n \to 0$, convergenza semplice (non converge assolutamente).
b) $x_n \to 0$, convergenza semplice (non converge assolutamente).
c) $x_n \to 0$, convergenza assoluta (si noti che non è a segni alternati).
d) $x_n \to 0$, convergenza assoluta.
e) $x_n \not\to 0$.
f) $x_n \to 0$, convergenza semplice (ma bisogna dimostrare che $\dfrac{1}{n\log n}$ è decrescente, ovvero che $n\log n$ è crescente), però non converge assolutamente.
g) $x_n \to 0$, convergenza semplice (non converge assolutamente).

14.6 Esercizio

Determinare la convergenza delle seguenti serie

$$a)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n + 1/n + \pi}{n^2\log n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \cos n \sin(1/n^2) \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin(1/n)$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\arctan n}{n^2+\cos n} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n \qquad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

14.6.1 Risoluzione

a) $x_n \to 0$, converge (essendo $1/n + \pi - 1 < \sin n + 1/n + \pi < 1/n + \pi - 1$, da cui...).
b) $x_n \to 0$, converge assolutamente essendo $\sin(1/n^2) \sim 1/n^2$.
c) $x_n \to 0$, non converge assolutamente (essendo $\sin(1/n) \sim 1/n$), ma converge semplicemente.
d) $x_n \to 0$, converge essendo $(\sqrt{n} \arctan n)/(n^2 + \cos n) \sim \pi/2/n^{3/2}$.
e) $x_n \to 0$, converge (criterio della radice).
f) $x_n \to 0$, non converge essendo $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sim 1/(2\sqrt{n})$.

14.7 Esercizio

Si discuta al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n^2 + \sqrt[4]{n}}$.

14.7.1 Risoluzione

Converge se $\alpha < 1$, diverge positivamente se $\alpha \geq 1$ (si noti che $\dfrac{(n+1)^\alpha}{n^2 + \sqrt[4]{n}} \sim \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$).

14.8 Esercizio

Si discuta al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

14.8.1 Risoluzione

Applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti si ottiene $\lim_{n\to+\infty} |x_{n+1}|/|x_n| = \lim_{n\to+\infty} |x|/(n+1) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Si noti che $\exp(x) = e^x = \lim_{t\to+\infty} (1 + x/t)^t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

14.9 Esercizio

Si discuta al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \pi^{\frac{-xn^3}{x^2+n^2}}$.

14.9.1 Risoluzione

Applicando il criterio della radice si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} = \pi^{-x}$, quindi la serie è assolutamente convergente per $x > 0$ e divergente per $x < 0$. Per $x = 0$ la serie evidentemente diverge.

14.10 Esercizio

Si discuta al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{n \log n}$.

14.10.1 Risoluzione

Applicando il criterio della radice alla serie dei valori assoluti si ha $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|2x-1|}{\sqrt[n]{n \log n}} = |2x-1|$. Quindi, se $|2x-1| < 1$, ossia $0 < x < 1$ la serie converge assolutamente. Se $2x-1 > 1$, ossia $x > 1$ la serie diverge essendo la serie a termini positivi e $x_n \not\to 0$. Se $2x-1 < -1$, ossia $x < 0$ la serie non converge essendo a termini alternati ed essendo $x_n \not\to 0$. Se $|2x-1| = 1$, ossia $x = 0 \vee x = 1$, non si può concludere nulla e bisogna riesaminare la serie iniziale. Per $x = 0$ si ha convergenza (Leibniz), se $x = 1$ divergenza positiva (confronto asintotico).
Quindi, la serie data converge solo per $x \in [0; 1[$.

14.11 Esercizio

Si discuta al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (x+1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$.

14.11.1 Risoluzione

Applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti si ottiene $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |x_{n+1}|/|x_n| = |x+1|$, quindi la serie è assolutamente convergente per $|x+1| < 1$. Se $x+1 > 1$, ossia $x > 0$ allora diverge ($x_n \not\to 0$), mentre se $x+1 < -1$, ossia $x < -2$ la serie non converge essendo a termini non positivi e $x_n \not\to 0$. Se $x = 0$ la serie (a termini positivi) diverge (confronto asintotico) mentre se $x = -2$ converge per Leibniz.

14.12 Esercizio

Si discuta al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n n!}{n^n}$.

14.12.1 Risoluzione

Applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti si ottiene $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |x_{n+1}|/|x_n| = \lim_{n\to+\infty} |x|/(1+1/n)^n = |x|/e$. Quindi si ha convergenza se $|x| < e$. Se $x > e$ la serie è a termini positivi e quindi il criterio del rapporto assicura la divergenza a $+\infty$. Se $x < -e$ la serie è di segno alternato ma siccome $x_n \not\to 0$ allora si ha non convergenza. Se $|x| = e$ allora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |x_{n+1}|/|x_n| = |x|/(1+1/n)^n = 1^+$, essendo $(1+1/n)^n$ una successione crescente, e quindi il termine generale non è infinitesimo. Pertanto, se $x = e$ si ha divergenza, se $x = -e$ si ha non convergenza.

14.13 Esercizio

Data la serie alternata $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$, si verifichi che converge e determinare la sua somma con un errore minore di $1/10$.

14.13.1 Risoluzione

Applicando Leibniz, essendo la successione $\{1/(2n-1)\}$ positiva e descrescente, la serie converge. Grazie alla stima dell'errore, si ha che $|S - s_n| \leq |a_{n+1}| = \frac{1}{2n+1}$, da cui $1/(2n+1) < 1/10 \Rightarrow n > 9/2$. Prendendo $n = 5$ la somma risulta $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 = 0.835\ldots$, che differisce da S di meno di $1/10$.

15 Derivate

Richiami sulle derivate utili ai fini degli esercizi.

- Definizione. Chiamiamo derivata di f in x, e la indichiamo con $f'(x)$, il limite, *se esiste finito*, del rapporto incrementale, ovvero

$$f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

  Nel caso si considerino separatemente il limite da destra e da sinistra, si avranno la derivata destra $f'_+(x)$ e la derivata sinistra $f'_-(x)$.

- Punti di non derivabilità. Se il limite del rapporto incrementale è infinito o non esiste, allora la funzione f non è derivabile in x. Si hanno tre casi.

  1. Punti di flesso a tangente verticale: $f'(x) = \pm\infty$ (derivata destra e sinistra coincidono ma sono entrambe $+\infty$ oppure $-\infty$)
  2. Punti di cuspide: $f'_+(x) = +\infty$ e $f'_-(x) = -\infty$ oppure $f'_+(x) = -\infty$ e $f'_-(x) = +\infty$ (derivata destra e sinistra sono opposte ed infinite)
  3. Punti angolosi: $f'_+(x) \neq f'_-(x)$ (derivata destra e sinistra sono diverse, una delle due può anche essere $+\infty$ oppure $-\infty$).

- Regole di derivazione

  1. $D[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$
  2. $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, da cui: $D[kf(x)] = kf'(x), k \in \mathbb{R}$
  3. $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, da cui: $D\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
  4. $D[f(g(h(x)))] = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$
  5. $D[f^{-1}(y)] = \frac{1}{f'(x)}$, essendo $y = f(x)$ e $f'(x) \neq 0$

6. $D[f(x)^{g(x)}] = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\log f(x) + g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]$

- Derivate fondamentali ed altre notevoli ricavate utilizzando quelle fondamentali e le regole di derivazione

derivate fondamentali

$f(x)$	$f'(x)$
$k, k \in \mathbb{R}$	0
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$a^x \log a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x}\log_a e = \dfrac{1}{x\log a}$
$\log x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log \|x\|$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

altre derivate notevoli

$f(x)$	$f'(x)$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-(1+\cot^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot}\, x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Nota. Si osservi che, in generale, per le funzioni sopra riportate, il dominio di $f'(x)$ coincide con quello di $f(x)$ ($D = D'$). Questo non è vero per $f(x) = x^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$, essendo $f'(x) = +\infty$ in $x = 0$, e per $f(x) = \arcsin x$ oppure $f(x) = \arccos x$, essendo $f'(x)$ infinita in $x = \pm 1$.

15.1 Esercizio

Utilizzando la definizione di derivata, si calcolino $D[1/x]$ e $D[\sqrt{x}]$.

15.1.1 Risoluzione

Si scriva il rapporto incrementale $[f(x+h) - f(x)]/h$ e se ne calcoli il limite per $h \to 0$.

15.2 Esercizio

Utilizzando la definizione di derivata, dire se la funzione $f(x) = |x-a|$, $a \in \mathbb{R}$, è derivabile in $x = a$.

15.2.1 Risoluzione

Si scriva il rapporto incrementale $[f(a+h)-f(a)]/h = |h|/h$ e se ne calcolino i limiti da destra e da sinistra, ossia per $h \to 0^{\pm}$. Siccome tali limiti non coincidono, la funzione f non è derivabile in $x = a$.

15.3 Esercizio

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Cosa si può dire di $D[|f(x)|]$?

15.3.1 Risoluzione

Applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, si ottiene facilmente che se $f(x) \neq 0$ allora $D[|f(x)|] = \operatorname{sgn} f(x) \cdot f'(x)$. Tuttavia, nel caso particolare $f(x) = 0$ la derivata $D[|f(x)|]$ diventa

$$D[|f(x)|] = \lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h)|}{h},$$

che esiste solo se il limite da destra e da sinistra coincidono, ovvero se derivata destra e sinistra sono uguali. Evidentemente, a causa del valore assoluto, questo accade solo se $f'(x) = 0$ e quindi per $f'(x) \neq 0 \wedge f(x) = 0$ $D[|f(x)|]$ non esiste. Il risultato si può riassumere come

$$D[|f(x)|] = \begin{cases} \operatorname{sgn} f(x) \cdot f'(x) & \text{se } f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) = 0 \wedge f'(x) = 0 \\ \nexists & \text{se } f(x) = 0 \wedge f'(x) \neq 0 \end{cases}$$

Tipicamente, i punti tali che $f(x) = 0 \wedge f'(x) \neq 0$ sono punti angolosi per la funzione $|f(x)|$.

15.4 Esercizio

In base al noto teorema, una funzione derivabile è continua. Esibire un esempio di funzione continua ma non derivabile.

15.4.1 Risoluzione

Basta prendere una funzione continua in $x = c$ ma tale che $f'_-(c) \neq f'_+(c)$. Per esempio
$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ x^2+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

15.5 Esercizio

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq c \\ ax+b & \text{se } x > c \end{cases}$$

determinare a e b in modo che $f(x)$ sia derivabile.

15.5.1 Risoluzione

Si noti che $f(x)$ è certamente derivabile per $x > c$ e per $x < c$. Per quanto riguarda $x = c$, applicando la definizione di derivata e osservando che $f(c) = c^2$, si ottengono le seguenti espressioni per le derivate sinistra e destra:

$$f'_-(c) = \lim_{h\to 0} \frac{(c+h)^2 - c^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2c + h = 2c$$

$$f'_+(c) = \lim_{h\to 0} \frac{a(c+h) + b - c^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah + (ac + b - c^2)}{h}$$

Si noti che $f'_-(c)$ è certamente finita, ma affinché lo sia anche $f'_+(c)$ è necessario che $ac + b - c^2 = 0$, che implica $f'_+(c) = a$. Per garantire la derivabilità in $x = c$, però, è necessario anche che $f'_+(c) = f'_-(c)$, ossia $2c = a$. Riassumendo, deve essere $c^2 = ac + b$ e $a = 2c$, da cui $a = 2c$ e $b = -c^2$.

Osservazione Molti studenti fanno l'**errore** di calcolare la derivata come

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \le c \\ a & \text{se } x > c \end{cases}$$

ed imporre $f'_+(c) = f'_-(c) \Leftrightarrow 2c = a$. Questo modo è *sbagliato* perchè non tiene conto della definizione di derivata. Infatti, scelti per esempio $a = 1, c = 2, b = 3$ (che soddisfano la condizione $2c = a$), si ottiene la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \le 2 \\ x + 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

che non è derivabile in quanto la definizione del limite del rapporto incrementale porta a $f'_+(2) = +\infty$. Per evitare questo, bisogna imporre la continutà della funzione in $x = c$.

15.6 Esercizio

Determinare eventuali punti di non derivabilità della funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

15.6.1 Risoluzione

Essendo $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x = \pm 1$ sono punti del dominio di $f(x)$ che però non appartengono al dominio di $f'(x)$ ($D' \subset D$). Pertanto $f(x)$, pur essendo definita in $x = \pm 1$, non è ivi derivabile.

15.7 Esercizio

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

stabilire se è continua, derivabile, e se la derivata è continua.

15.7.1 Risoluzione

È immediato verificare che $f(x)$ è continua. Per $x \neq 0$ la funzione è derivabile e risulta $f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$. Per $x = 0$ è necessario applicare la definizione, quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{(0+h)\sin\left(\dfrac{1}{0+h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sin\dfrac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h} = \nexists.$$

Quindi,

$$f'(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \nexists & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si noti che $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}\right) = \nexists$, pertanto $f'(x)$ non è continua in $x = 0$.

15.8 Esercizio

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

stabilire se è continua, derivabile, e se la derivata è continua.

15.8.1 Risoluzione

È immediato verificare che $f(x)$ è continua. Per $x \neq 0$ la funzione è derivabile e risulta $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. Per $x = 0$ è necessario applicare la definizione, quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^2\sin\left(\dfrac{1}{0+h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin\dfrac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0.$$

Quindi,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si noti che $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}\right) = \nexists$, pertanto $f'(x)$ non è continua in $x = 0$.

15.9 Esercizio

Discutere la continuità, derivabilità e continuità della derivata prima della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha\sin\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

essendo $\alpha \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

15.9.1 Risoluzione

Si proceda come nei due esercizi precedenti, discutendo inoltre la continuità della derivata.

15.10 Esercizio

Utilizzando i teoremi sulle derivate (regole di derivazione), calcolare le derivate delle seguenti funzioni.

x^3+4x+1	$[3x^2+4]$	$\sqrt{x}$	$[\frac{1}{2\sqrt{x}}]$
$\frac{x^3+2x+1}{x^2+1}$	$[\frac{x^4+x^2-2x+2}{(x^2+1)^2}]$	$\frac{1}{\cos x}$	$[\frac{\sin x}{\cos^2 x}]$
e^{x^2+x}	$[(2x+1)e^{x^2+x}]$	$\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	$[\frac{1}{x^2-1}]$
x^x	$[x^x(\log x+1)]$	$\log(\log x)$	$[\frac{1}{x\log x}]$
$\sqrt{x}^{\sqrt{x}}$	$[\frac{\sqrt{x}^{\sqrt{x}-1}(\log x+2)}{4}]$	$\log(\log\log(x))$	$[\frac{1}{x\log x\log(\log x)}]$
$(x^3+4)^{\cos x}$	$[(x^3+4)^{\cos x}\left(\frac{3x^2\cos x}{x^3+4}-\sin x\log(x^3+4)\right)]$	e^{e^x}	$[e^{e^x+x}]$
$\sin x^{\cos x}$	$[\sin x^{\cos x-1}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\log(\sin x)\right)]$	$x\arcsin x$	$[\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}]$
$\arccos(1-2x)$	$[\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}]$	$\frac{1}{2}\arccos(1-x^2)$	$[\frac{x}{\lvert x\rvert\sqrt{2-x^2}}]$
$\arctan(\sin x)$	$[\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}]$	$\arctan\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$[\frac{\cos x(2-\cos^2 x)}{\cos^4 x-\cos^2 x+1}]$

15.11 Esercizio

Si determini l'equazione della tangente al grafico delle seguenti funzioni nei punti indicati a fianco.

1. $f(x)=5x^2+3x; \quad x_0=1$
2. $f(x)=\arctan\frac{2-\cos x}{1+\cos x}; \quad x_0=\frac{\pi}{3}$
3. $f(x)=\sqrt[3]{(x+2)^2}; \quad x_0=-2$

15.11.1 Risoluzione

1. $y=13x-5$
2. $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{(9-4\sqrt{3})\pi}{36}$
3. $x+2=0$

15.12 Esercizio

Determinare l'espressione della derivata n-esima delle seguenti funzioni.

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = 3^x$
3. $f(x) = e^{-x}$
4. $f(x) = \log x$
5. $f(x) = \sin x$
6. $f(x) = \cos x$
7. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, \quad ad \neq bc$

15.12.1 Risoluzione

1. e^x
2. $3^x(\log 3)^n$
3. $(-1)^n e^{-x}$
4. $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$
5. $\sin(x + n\pi/2)$
6. $\cos(x + n\pi/2)$
7. $(-1)^{n-1}c^{n-1}n!\dfrac{(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$

16 Proprietà delle funzioni derivabili

Richiami sulle applicazioni delle derivate utili ai fini degli esercizi.

- Se x_0 è un punto di minimo o di massimo per $f(x)$, allora $f'(x_0) = 0$.
- Teorema di Rolle. Sia $f(x)$ continua su $[a, b]$, derivabile su $]a, b[$ e $f(a) = f(b)$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.
  Geometricamente il teorema assicura che, se sono verificate le ipotesi, esiste almeno un punto $\xi \in]a, b[$ a tangente orizzontale.

- Teorema di Cauchy. Siano $f(x)$ e $g(x)$ continue su $[a,b]$ e derivabili su $]a,b[$. Allora esiste $\xi \in]a,b[$ tale che $g'(\xi)[f(b)-f(a)] = f'(\xi)[g(b)-g(a)]$.
  Se, inoltre, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a,b[$ (il che implica $g(a) \neq g(b)$), allora
  $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$
- Teorema di Lagrange (o del valor medio). Sia $f(x)$ continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$. Allora esiste $\xi \in]a,b[$ tale che $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$.
  Geometricamente il teorema assicura che, se sono verificate le ipotesi, esiste almeno un punto $\xi \in]a,b[$ in cui la tangente è parallela alla retta passante per i punti estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.
- Sia $f(x)$ continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$, allora
  1. $f'(x) = 0 \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow f(x)$ costante su $[a,b]$.
  2. $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow f(x)$ crescente su $[a,b]$ (strettamente se $f'(x) > 0$).
  3. $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow f(x)$ decrescente su $[a,b]$ (strettamente se $f'(x) < 0$).
- Ricerca di massimi/minini. La condizione necessaria $f'(x_0) = 0$ fornisce l'insieme di possibili punti di massimo e/o minimo. L'analisi della monotonia di $f(x)$ nell'intorno di x_0 o l'uso delle derivate successive calcolate in x_0 (si veda più avanti) permette di determinare eventuali massimi o minimi.

16.1 Esercizio

Si determinino gli intervalli in cui le seguenti funzioni sono crescenti.

$f(x) = x^2 - 3x + 2$	$[x \geq 3/2]$	$f(x) = \log(x^2+1)$	$[x \geq 0]$
$f(x) = \log(x^2 - 1)$	$[x > 1]$	$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{2x}$	[mai]
$f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + \dfrac{11}{2}x^2 - 6x + 2$	$[-1 \leq x \leq 2 \vee x \geq 3]$	$\dfrac{2x+1}{x+3}$	$[\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}]$

16.1.1 Risoluzione

Si calcoli la derivata e se ne studi la positività.

16.2 Esercizio

Si determinino eventuali massimi e minimi relativi della funzione $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 3$ in $\mathbb{R}$.

16.2.1 Risoluzione

Essendo $f'(x) = 2(6x^2 - 5x + 1)$ si ha $f'(x) = 0$ per $x_1 = 1/3$ e $x_2 = 1/2$. Dallo studio della monotonia di $f(x)$ si deduce che $f(x)$ è crescente per $x < 1/3$ e $x > 1/2$ e decrescente altrove. Pertanto, $x_1 = 1/3$ è punto di massimo e $x_2 = 1/2$ è punto di minimo.

16.3 Esercizio

Si determinino eventuali massimi e minimi relativi della funzione $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ in $\mathbb{R}$.

16.3.1 Risoluzione

Essendo $f'(x) = 3(x-2)^2$ si ha $f'(x) = 0$ per $x = 2$. Tuttavia, dallo studio della monotonia di $f(x)$ si deduce che $f(x)$ è sempre crescente e quindi $x = 0$ non è né punto di massimo né punto di minimo ma punto di flesso a tangente orizzontale.

16.4 Esercizio

Si dica se il teorema di Rolle è applicabile nei seguenti casi sugli intervalli riportati e, se lo è, si determini/no il/i punto/i ξ previsto/i da tale teorema.

1. $f(x) = -x^2 + 6x$ sull'intervallo $[2, 4]$
2. $f(x) = x^3 - 3x$ sull'intervallo $[0, \sqrt{3}]$
3. $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ sull'intervallo $[0, 3]$

16.4.1 Risoluzione

1. $\xi = 3$
2. $\xi = 1$. Perché $\xi = -1$ non è accettabile?
3. $\xi = 3/2$

16.5 Esercizio

Si dica se il teorema di Lagrange (o del valor medio) è applicabile nei seguenti casi sugli intervalli riportati e, se lo è, si determini/no il/i punto/i ξ previsto/i da tale teorema.

1. $f(x) = -x^2 + 4$ sull'intervallo $[-2, 1]$
2. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ sull'intervallo $[0, 2]$
3. $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-5}$ sull'intervallo $[0, 2]$

16.5.1 Risoluzione

1. $\xi = -1/2$
2. $\xi = (1+\sqrt{7})/3$. Perché $\xi = (1-\sqrt{7})/3$ non è accettabile?
3. $\xi = (5-\sqrt{5})/2$.

16.6 Esercizio

Utilizzando i teoremi sulle derivate, si dimostri che

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

16.6.1 Risoluzione

Si calcoli la derivata di $f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ e si noti che $f'(x)$ è identicamente nulla $\forall x \in \mathbb{R}$. Pertanto $f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ è costante e il valore di tale costante può essere facilmente determinato calcolando $f(0) = 0$. Quindi, $\arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \Rightarrow \arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

16.7 Esercizio

Utilizzando i teoremi sulle derivate, si dimostri che

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$$

16.7.1 Risoluzione

Si ragioni come sopra oppure si veda l'esercizio 8.19 delle dispense del Prof. Squassina.

16.8 Esercizio

Utilizzando i teoremi sulle derivate, si dimostri che per $x > -1$ si ha

$$x \geq \log(1+x)$$

16.8.1 Risoluzione

Posto $h(x) = x - \log(1+x)$, definita per $x > -1$, si noti che $h(x)$ ha un minimo assoluto in $x = 0$ essendo $h'(0) = 0$, $h'(0) > 0$ per $x > 0$ e $h'(0) < 0$ per $x < 0$. Essendo inoltre $h(0) = 0$, si conclude che $h(x) \geq 0$ per $x > -1$, ovvero $x \geq \log(1+x)$ per $x > -1$.

16.9 Esercizio

Utilizzando i teoremi sulle derivate, si dimostrino le seguenti disuguaglianze

1. $e^x \geq x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\dfrac{x^2+1}{8} \geq \dfrac{x^2}{(x+1)^2}, \quad x > 0$
3. $x \log_a x \geq (x-1) \log_a e, \quad x > 0, a > 1 \wedge a \neq 1$

16.9.1 Risoluzione

Si proceda come nell'esercizio precedente.

16.10 Esercizio

Verificare che la funzione $f(x) = \sin(e^x)$ soddisfa l'equazione

$$f''(x) - f'(x) + e^{2x} f(x) = 0.$$

16.10.1 Risoluzione

Essendo $f'(x) = e^x \cos(e^x)$ e $f''(x) = e^x \cos(e^x) - e^{2x} \sin(e^x)$ basta sostituire e verificare l'identità.

17 Calcolo di limiti tramite il teorema di de L'Hôpital

Richiami sull'utilizzo del teorema di de L'Hôpital.

- Teorema di de L'Hôpital. Siano $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ due funzioni tali che:

  1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ (oppure $\pm\infty$)
  2. f, g derivabili su $]a, b[$ e $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in]a, b[$
  3. esista finito il limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

  allora anche il rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ammette limite e si ha

  $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Il teorema di de L'Hôpital è applicabile anche nel caso di limite destro e/o sinistro e nel caso $x \to \pm\infty$.

- Il teorema di de L'Hôpital è applicabile anche nel caso in cui il limite di $f(x)$ non esista e $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$.
- Si noti che se $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \infty$ (ossia $f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$) allora si hanno due possibilità:
  1. applicare de L'Hôpital al rapporto $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)}$, essendo $h(x) = 1/g(x)$, ottenendo una forma di indecisione del tipo $0/0$
  2. applicare de L'Hôpital al rapporto $\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)}$, essendo $h(x) = 1/f(x)$, ottenendo una forma di indecisione del tipo ∞/∞

17.1 Esercizio

Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si dimostrino le seguenti uguaglianze.

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0, \quad \forall a > 1, \forall b > 0$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^b} = 0, \quad \forall a > 1, \forall b > 0$
3. $\lim_{x\to 0^+} x^b \log_a x = 0, \quad \forall a > 1, \forall b > 0$

Si noti che vale anche $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^b} = 0, \quad \forall a > 1, \forall b > 0, \forall \alpha > 0$

17.1.1 Risoluzione

1. Posto $x^b/a^x = (x/a^{\frac{x}{b}})^b = (x/\alpha^x)^b$ essendo $\alpha = a^{\frac{1}{b}} > 1$, basta mostrare che il limite di x/α^x è zero. Utilizzando de L'Hôpital si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha^x \log\alpha} = 0$.
2. Applicando subito de L'Hôpital si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x}\log_a e}{bx^{b-1}} = \frac{\log_a e}{bx^b} = 0$.
3. Si noti la forma di indecisione del tipo $0 \cdot \infty$. Riscrivendo $x^b \log_a x = \log_a x / x^{-b}$ ed applicando de L'Hôpital sia arriva subito alla soluzione.

17.2 Esercizio

Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si calcolino i seguenti limiti.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x}$	$[0]$	$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$	$[\alpha]$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$	$[+\infty]$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^3}{x}$	$[0]$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2x+1)}{\log x}$	$[1]$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\log x}$	$[1/2]$

17.2.1 Risoluzione

Si applichi il teorema una o più volte.

17.3 Esercizio

Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si calcolino i seguenti limiti.

$$1.\ \lim_{x\to 0^+} x^{10} \cdot e^{\frac{1}{x}} \qquad 2.\ \lim_{x\to 0^+} x^x \qquad 3.\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x}$$

17.3.1 Risoluzione

1. Forma di indecisione $0\cdot\infty$. Si noti che riscrivendo come $e^{1/x}/x^{-10}(\infty/\infty)$ oppure $x^{10}/e^{-1/x}(0/0)$ non si risolve la forma di indecisione. Se, invece, si pone $t = 1/x$, il limite diventa $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^{10}} = +\infty$.
2. $x^x = e^{x\log x}$, passando al limite si ottine 1.
3. $\sqrt[x]{x} = e^{\frac{1}{x}\log x}$, passando al limite si ottine 1.

17.4 Esercizio

Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si calcoli

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin x}{\cos x}$$

17.4.1 Risoluzione

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin^2 x} = 0$$

17.5 Esercizio

Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\sqrt{1+x^2}}{1-\cos x}$$

17.5.1 Risoluzione

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log\sqrt{1+x^2}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\log(1+x^2)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1+x^2)\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x\sin x + (1+x^2)\cos x} =$ 1.

17.6 Esercizio

Utilizzando il teorema di de L'Hôpital calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} x\log x.$$

17.6.1 Risoluzione

Si noti che sono limiti nella forma $0\cdot\infty$. Dagli esempi generali visti la scorsa esercitazione si sa già il risultato. Altrimenti, basta osservare che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} =$ 0 e $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$.

17.7 Esercizio

Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)}\right)$$

17.7.1 Risoluzione

Derivando una volta si ha $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\log(x+1) - x}{x\log(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{\log(x+1) + x/(x+1)}$. Derivando ulteriormente oppure dividendo numeratore e denominatore per $\log(x+1)$ si ottiene $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{x+1}\cdot\frac{x}{\log(x+1)}} = \frac{1}{2}$, ove si è tenuto conto del limite notevole noto.

17.8 Esercizio

Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}$$

17.8.1 Risoluzione

Raccogliendo x al numeratore e al denominatore si ottiene banalmente $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = 1$.

Attenzione: se si fosse applicato de L'Hôpital (il limite si presenta nella forma ∞/∞), si sarebbe ottenuto $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+\cos x}{1-\sin x} = \nexists$. L'uguaglianza tra i due limiti rappresenta un nonsenso in quanto il limite del rapporto delle derivate non esiste e quindi il teorema di de L'Hôpital non è applicabile e nulla si può dire sul limite originale. Al contrario, la scrittura adottata porterebbe a concludere che $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{x+\cos x} = \nexists$, che è falso. Pertanto, l'utilizzo dell'uguale (=) tra un passaggio e l'altro nell'applicazione di de L'Hôpital è prassi ma formalmente è consentito *solo dopo* aver verificato l'effettiva esistenza del limite del rapporto delle derivate.

18 Calcolo di limiti tramite sviluppi in serie di Taylor

Richiami utili al calcolo di limiti tramite sviluppi in serie di Taylor

- Sviluppi di McLaurin (ossia sviluppi di Taylor centrati nell'origine) per le principali funzioni.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)
\end{aligned}$$

- Proprietà del simbolo "o piccolo" o. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ si ha:

  1. $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$
  2. $a \cdot o(x^n) = o(x^n)$
  3. $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
  4. $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
  5. $o(o(x^n)) = o(x^n)$
  6. $o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$

18.1 Esercizio

Determinare gli sviluppi di McLaurin (ossia gli sviluppi di Taylor centrati nell'origine) di

$$\frac{1}{1+x} \qquad \text{e} \qquad \sqrt{1+x}$$

arrestati al second'ordine.

18.1.1 Risoluzione

Considerando lo sviluppo di $(1+x)^\alpha$, posto rispettivamente $\alpha = -1$ e $\alpha = 1/2$, si ha $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ e $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$. Alternativamente, si poteva procedere calcolando le funzioni e le rispettive derivate (fino alla seconda) nel punto $x = 0$.

18.2 Esercizio

Verificare che, per $x \to 0$, valgono gli sviluppi

$$\log(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \qquad \text{e} \qquad e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

18.2.1 Risoluzione

Dagli sviluppi del coseno, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, e del logaritmo, $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, posto $1 + y = \cos x \Rightarrow y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, si ha $\log(\cos x) = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right] - \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right]^2 + o([x^2]^2) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$.
Lo stesso ragionamento si applica agli sviluppi dell'esponenziale e del seno.

18.3 Esercizio

Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x + \log\cos x}{x^4}$$

18.3.1 Risoluzione

Dall'esercizio precedente è noto lo sviluppo del $\log\cos x$ per $x \to 0$, pertanto
$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x + \log\cos x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - [1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)] + [-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)]}{x^4} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{8}$.

18.4 Esercizio

Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}+\sin x}{\tan x}$$

18.4.1 Risoluzione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}+\sin x}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}{x} = +\infty.$$

18.5 Esercizio

Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)-\sin x + x^2/2}{x^3}$$

18.5.1 Risoluzione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)-\sin x + x^2/2}{x^3} =$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{[x-x^2/2+x^3/3+o(x^3)]-[x-x^3/6+x^5/120+o(x^6)]+x^2/2}{x^3} =$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3/3+x^3/6+o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

18.6 Esercizio

Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

18.6.1 Risoluzione

Dopo aver notato che lo sviluppo del $\sin^2 x = [x - x^3/6 + o(x^4)]^2 = x^2 - x^4/3 + o(x^4)$, si ha $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^4/3 + o(x^4)}{x^4 + o(x^6)} = -\frac{1}{3}.$

18.7 Esercizio

Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1-x^2+\log(1+x^3)}{\sin x - x}$$

18.7.1 Risoluzione

Noti gli sviluppi $e^{x^2} = 1 + x^2 + x^4/2 + o(x^4)$, $\log(1 + x^3) = x^3 + o(x^3)$ e $\sin x = x - x^3/6 + o(x^4)$, si ha $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2 + \log(1 + x^3)}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4/2 + o(x^4) + x^3 + o(x^3)}{-x^3/6 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{-x^3/6 + o(x^4)} = -\frac{1}{6}$.

Attenzione: se si fosse arrestato lo sviluppo di e^{x^2} a $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$ si sarebbe ottenuto $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2 + \log(1 + x^3)}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{-x^3/6 + o(x^4)} = \infty$, che è evidentemente sbagliato!

18.8 Esercizio

Utilizzando gli sviluppi di Taylor, discutere al variare del parametro a il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\log(1 + x) - 6x + 3x^2 - 2x^3}{x^4}$$

18.8.1 Risoluzione

$\lim_{x\to 0} \frac{a\log(1 + x) - 6x + 3x^2 - 2x^3}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{a[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)] - 6x + 3x^2 - 2x^3}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(a - 6)x + (3 - \frac{a}{2})x^2 + (\frac{a}{3} - 2)x^3 - \frac{a}{4}x^4}{x^4}$.

Quindi, per $a = 6$ il limite vale $-\frac{3}{2}$; per $a \neq 6$ vale ∞.

18.9 Esercizio

Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$$

18.9.1 Risoluzione

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\log\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\log\frac{x - x^3/6 + o(x^3)}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\log[1 - x^2/6 + o(x^2)]} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-x^2/6 + o(x^2)}{x^2}} = e^{-1/6}$

18.10 Esercizio

Utilizzando gli sviluppi di Taylor calcolare i seguenti limiti

$a)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^{1/x^2}$ $\qquad b)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{1/x^2}$ $\qquad c)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$

18.10.1 Risoluzione

Procedendo come nell'esercizio precedente, si ricava facilmente (a) $e^{-2/3}$; (b) $e^{-3/2}$; (c) 1.

19 Determinazione di eventuali asintoti di una funzione

Richiami utili per la determinazione degli asintoti.

- Asintoti orizzontali.

  1. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, allora la retta $y = l_1$ si dice asintoto orizzontale destro per $f(x)$.
  2. Se $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$, allora la retta $y = l_2$ si dice asintoto orizzontale sinistro per $f(x)$.
  3. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, allora la retta $y = l$ si dice asintoto orizzontale per $f(x)$.

- Asintoti verticali.
  Se una funzione ammette limite (o semplicemente limite destro, oppure limite sinistro) infinito per $x \to x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, allora la retta $x = x_0$ si dice asintoto verticale per $f(x)$ (anche in questo caso si può distinguere tra asintoto da destra e da sinistra nel caso uno dei due limiti sia infinito e l'altro o non lo sia o non esista). In pratica, basta che sia verificata una delle seguenti condizioni $\lim\limits_{x\to x_0^\pm} f(x) = +\infty$ oppure $-\infty$ oppure ∞.

- Asintoto obliquo.
  Se $f(x) \sim mx + q$ per $x \to +\infty$ (oppure per $x \to -\infty$), allora la retta $y = mx + q$ si dice asintoto obliquo per $f(x)$ (anche qui si può distinguere tra asintoto destro e sinistro nel caso siano diversi tra loro). Questa condizione si può riscrivere come $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$ (rispettivamente $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$). Praticamente, m e q vengono determinati come segue, purchè entrambi i limiti esistano finiti:
  $$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$$

19.1 Esercizio

Determinare eventuali asintoti di $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ e $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$.

19.1.1 Risoluzione

$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Asintoto orizzontale $y = 1$, asintoto verticale $x = -1$.
$f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Asintoto obliquo $y = x$ per $x \to +\infty$, e altro asintoto obliquo $y = -x$

per $x \to -\infty$.
$f(x) = x + \sqrt[3]{x}$. Non ammette asintoti. Infatti, $f(x) \sim x$ per $x \to +\infty$, ma $[f(x) - x] \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

20 Determinazione del dominio di una funzione

Richiami utili per la determinazione del dominio.

- Determinare il *dominio* o *insieme di definizione* o *campo di esistenza* di una funzione significa trovare tutti i valori della variabile indipendente x per i quali l'espressione analitica di $f(x)$ ha significato. Generalmente questo equivale ad un sistema in cui sono riportate tutte le condizioni che devono verificarsi simultaneamente.

- Funzioni che hanno problemi di dominio:

  1. $\sqrt[2n]{\varphi(x)} \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$
  2. $[\varphi(x)]^{\alpha}, \alpha \notin \mathbb{N} \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$
  3. $\dfrac{1}{\varphi(x)} \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$
  4. $\log_a \varphi(x), a > 0, a \neq 1 \Rightarrow \varphi(x) > 0$
  5. $\tan \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
  6. $\cot \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
  7. $\arcsin \varphi(x) \Rightarrow -1 \leq \varphi(x) \leq 1$
  8. $\arccos \varphi(x) \Rightarrow -1 \leq \varphi(x) \leq 1$

- Funzioni che non hanno problemi di dominio: tutti i polinomi, le potenze con esponente naturale ($[\varphi(x)]^n, n \in \mathbb{N}$), le esponenziali ($a^{\varphi(x)}$), le radici con indice dispari ($\sqrt[2n+1]{\varphi(x)}$), seno e coseno ($\sin \varphi(x)$, $\cos \varphi(x)$) e arcotangente ($\arctan \varphi(x)$).

20.1 Esercizio

Determinare il dominio di $f(x) = \sqrt{x(1 - x^2)}$.

20.1.1 Risoluzione

Deve essere $x(1 - x^2) \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [0, 1]$.

20.2 Esercizio

Determinare il dominio di $f(x) = \sqrt{\log x}$.

20.2.1 Risoluzione

Deve essere $\begin{cases} \log x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [1, +\infty[$.

20.3 Esercizio

Determinare il dominio di $f(x) = \log\left[(\log x - 1)^{\pi}\right]$.

20.3.1 Risoluzione

Deve essere $\begin{cases} \log x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in]e, +\infty[$.

20.4 Esercizio

Determinare il dominio di $f(x) = \sqrt{\dfrac{\log^2 x - 4}{\log x + 1}}$.

20.4.1 Risoluzione

Deve essere $\begin{cases} \dfrac{\log^2 x - 4}{\log x + 1} \geq 0 \\ \log x + 1 \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}[\cup [e^2, +\infty[$.

20.5 Esercizio

Determinare il dominio di $f(x) = \arcsin[\log(x-1) - \log x)]$.

20.5.1 Risoluzione

Deve essere $\begin{cases} -1 \leq \log(x-1) - \log x \leq 1 \\ x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [\frac{e}{e-1}, +\infty[$.

21 Grafico qualitativo di una funzione

Schema generale per lo studio di una funzione.

1. Determinazione del dominio D di $f(x)$.
2. Eventuali simmetrie e/o periodicità in modo da studiare la funzione eventualmente su un intervallo più piccolo rispetto al dominio.
   Funzione pari: $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D$
   Funzione dispari: $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in D$
   Funzione periodica: $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D, T \in \mathbb{R}$.
3. Intersezioni con gli assi.
4. Segno di $f(x)$ (da evitare nei casi complicati).
5. Calcolo dei limiti agli estremi del dominio (agli estremi di tutti gli intervalli di cui il dominio è l'unione) e determniazione di eventuali asintoti.

6. Calcolo della derivata prima e studio del segno di $f'(x)$ per determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ ed eventuali punti di massimo e minimo per $f(x)$.

7. Calcolo della derivata seconda e studio del segno di $f''(x)$ per determinare gli intervalli in cui $f(x)$ è concava o convessa ed eventuali punti di flesso per $f(x)$.

21.1 Esercizio

Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

21.1.1 Risoluzione

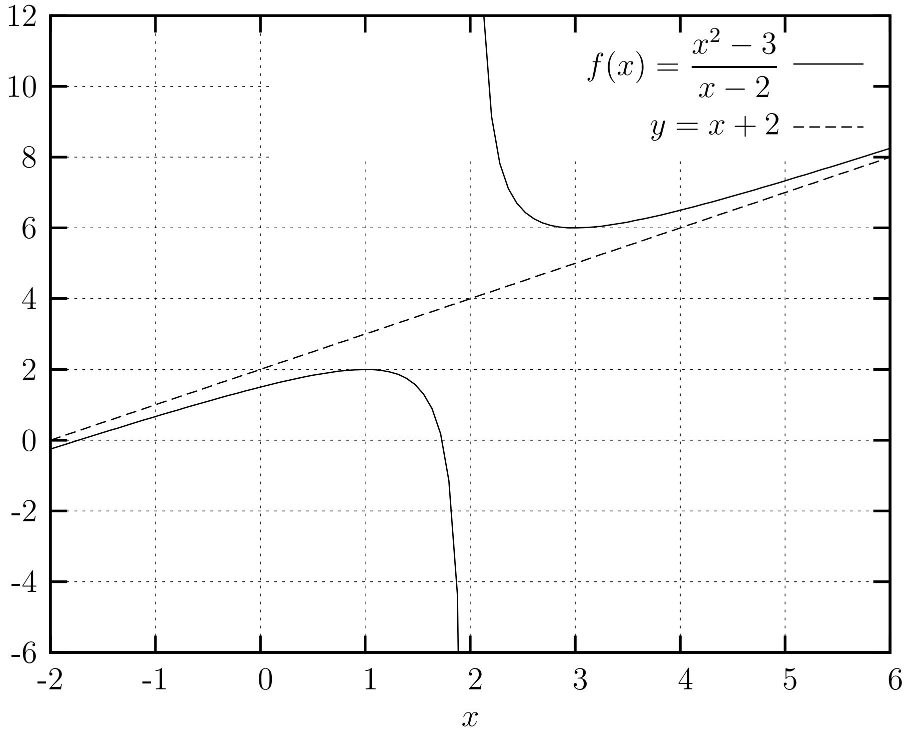

Figura 1: Grafico di $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$ e del suo asintoto obliquo $y = x + 2$ (esercizio 21.1)

1. Dominio: $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \in]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.

2. Né simmetrie né periodicità.

3. Intersezioni con gli assi. $x = 0 \Rightarrow y = 3/2$. $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

4. Segno: $f(x)$ non negativa per $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]\cup]2, +\infty[$.

5. Limiti, nell'ordine:
$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x-2}=-\infty$; $\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-3}{x-2}=-\infty$ $\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-3}{x-2}=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{x-2}=+\infty$.
Pertanto, $f(x)$ ammette un asintoto verticale di equazione $x=2$ e non ammette certamente asintoto orizzontale. Potrebbe ammettere asintoto obliquo: verifichiamo. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3}{x^2-2x}=1$, $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-3}{x-2}-x\right]=2$.
Quindi $f(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione $y=x+2$.

6. Derivata prima $f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$. Essa ha lo stesso dominio di $f(x)$ e quindi la funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio. $f'(x)$ si annulla per $x=1\vee x=3$, che sono quindi punti stazionari. $f'(x)$ è non negativa per $x\in]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$, pertanto $f(x)$ è ivi crescente. $f'(x)$ è non positiva per $x\in[1,2[\cup]2,3]$, pertanto $f(x)$ è ivi decrescente. Dal segno di $f'(x)$ si deduce che $x=1$ è un punto di minimo relativo $(1,2)$, mentre $x=3$ è un punto di massimo relativo $(3,6)$.

7. Derivata seconda $f''(x)=\frac{2}{(x-2)^3}$. Siccome $f''(x)\neq0$, non esistono punti di flesso. Dallo studio del segno di $f''(x)$ si deduce che $f''(x)>0$ per $x\in]2,+\infty[$ pertanto $f(x)$ è ivi convessa, mentre è concava altrove.

In figura 1 è riportato il grafico di $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$ e del suo asintoto obliquo $y=x+2$.

21.2 Esercizio

Studiare la funzione $f(x)=\sqrt{x^2-\frac{8}{x}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

21.2.1 Risoluzione

1. Dominio: $x^2-\frac{8}{x}\geq0\Rightarrow x\in]-\infty,0[\cup[2,+\infty[$.

2. Né simmetrie né periodicità.

3. Intersezioni con gli assi. $x=0$ è escluso dal dominio e quindi non si può calcolare. $y=0\Rightarrow x=2$.

4. Segno: $f(x)$ è sempre non negativa.

5. Limiti, nell'ordine:
$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-\frac{8}{x}}=+\infty$; $\lim_{x\to0^-}\sqrt{x^2-\frac{8}{x}}=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-\frac{8}{x}}=+\infty$. Si noti che non si sono fatti né il limite per $x\to0^+$, non essendo ammesso dal dominio, né il limite per $x\to2^+$, essendo $f(2)=0$. Dall'analisi dei limiti si deduce che $f(x)$ ammette un asintoto verticale (sinistro) di equazione $x=0$ e

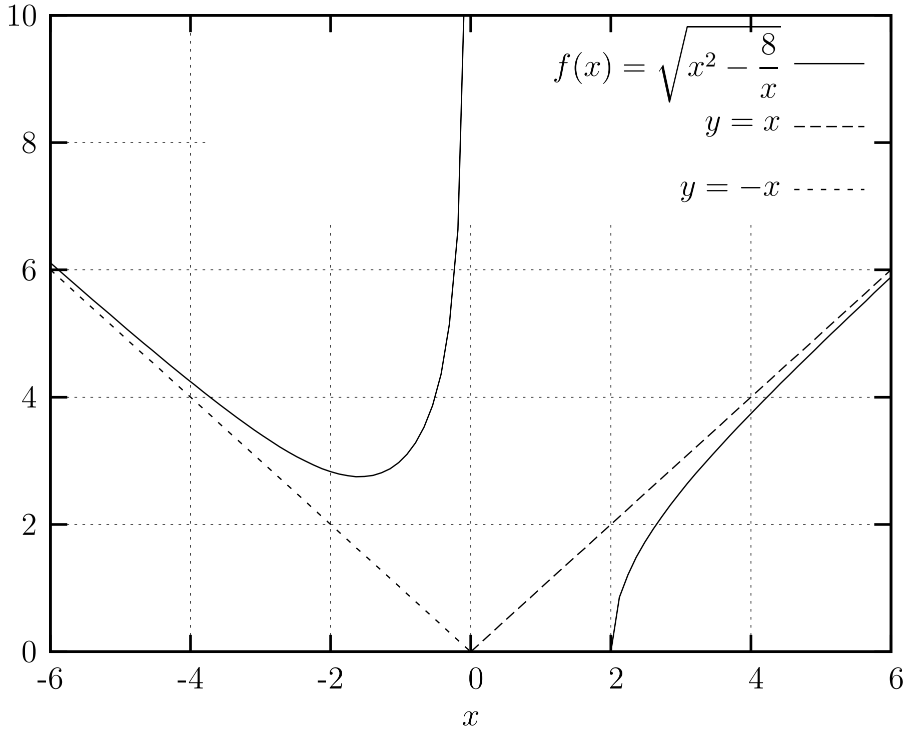

Figura 2: Grafico di $f(x)=\sqrt{x^2-\dfrac{8}{x}}$ e dei sui asintoti obliqui $y=\pm x$ (esercizio 21.2)

non ammette certamente asintoto orizzontale. Potrebbe ammettere asintoto obliquo: verifichiamo. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\sqrt{x^2-\frac{8}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{8}{x^3}}=\pm 1$, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)\mp x]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-8/x}{\sqrt{x^2-8/x}\pm x}\right]=0$. Quindi $f(x)$ ammette asintoto obliquo destro di equazione $y=x$ e asintoto obliquo sinistro di equazione $y=-x$.

6. Derivata prima $\displaystyle f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{8}{x}}}\left(x+\frac{4}{x^2}\right)=\frac{x^3+4}{x^2\sqrt{\frac{x^3-8}{x}}}=\frac{x^3+4}{\sqrt{x^3(x^3-8)}}$. Si noti che essa *non ha lo stesso dominio di* $f(x)$. Infatti, per $x=2$ si annulla il denominatore di $f'(x)$. Essendo $\lim_{x\to 2^+}f'(x)=+\infty$, $f(x)$ non è derivabile in $x=2$. $f'(x)$ si annulla per $x=-\sqrt[3]{4}$, che è quindi un punto stazionario. $f'(x)$ è non negativa per $x\in[-\sqrt[3]{4},0[\cup]2,+\infty[$, pertanto $f(x)$ è ivi crescente. $f'(x)$ è non popsitiva per $x\in]-\infty,-\sqrt[3]{4}]$, pertanto $f(x)$ è ivi decrescente. Dal segno di $f'(x)$ si deduce che $x=-\sqrt[3]{4}$ è un punto di minimo relativo, mentre dal grafico si può dedurre che $x=2$ è il minimo assoluto.

7. Derivata seconda $\displaystyle f''(x)=-\frac{24(x^3-2)}{x^4\sqrt{(x^2-8/x)^3}}$. Siccome $f''(x)\neq 0$ (non essendo

$x = \sqrt[3]{2}$ nel dominio), non esistono punti di flesso. Dallo studio del segno di $f''(x)$ si deduce che $f''(x) > 0$ per $x \in]-\infty, 0[$ pertanto $f(x)$ è ivi convessa, mentre è concava per $x \in]2, +\infty[$.

In figura 2 è riportato il grafico di $f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{8}{x}}$ e dei sui asintoti obliqui $y = \pm x$.

21.3 Esercizio

Studiare la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

21.3.1 Risoluzione

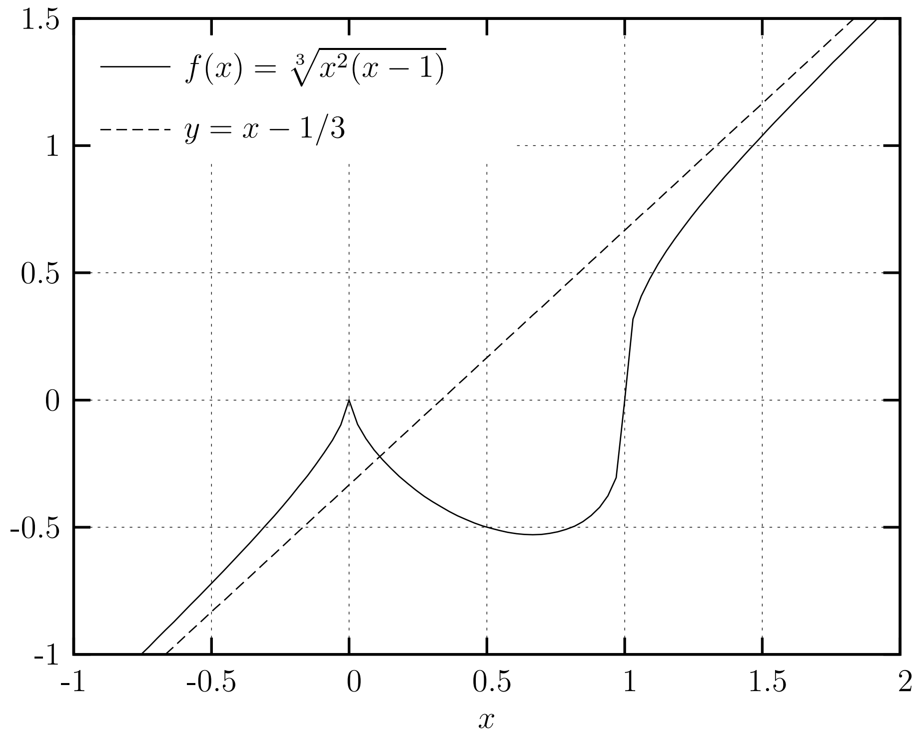

Figura 3: Grafico di $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ e del suo asintoto obliquo $y = x - 1/3$ (esercizio 21.3)

1. Dominio: $D = \mathbb{R}$, essendo l'indice della radice dispari.

2. Né simmetrie né periodicità.

3. Intersezioni con gli assi. $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$.

4. Segno: $f(x)$ è non negativa quando $(x-1) \geq 0$, ovvero per $x \in [1, +\infty[$.

5. Limiti, nell'ordine:
$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2(x-1)} = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2(x-1)} = +\infty$. Dall'analisi dei limiti si deduce che $f(x)$ non ammette né asintoto verticale né orizzontale. Potrebbe ammettere asintoto obliquo: verifichiamo. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\sqrt[3]{x^2(x-1)} = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = -1/3$. Quindi $f(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione $y = x - 1/3$.

6. Derivata prima $f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}} = \frac{3x-2}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}}$. Si noti che essa *non ha lo stesso dominio di* $f(x)$. Infatti, per $x = 0 \vee x = 1$ si annulla il denominatore di $f'(x)$ e pertanto $f(x)$ non è derivabile in tali punti. Essendo $\lim_{x\to0^-} f'(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\infty$, e $\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^+} f'(x) = +\infty$, si deduce che $x = 0$ è un punto di cuspide per $f(x)$ mentre $x = 1$ è un punto di flesso a tangente verticale. $f'(x)$ si annulla per $x = 2/3$, che è quindi un punto stazionario. $f'(x)$ è non negativa per $x \in]-\infty, 0[\cup[2/3, 1[\cup]1, +\infty[$, pertanto $f(x)$ è ivi crescente. $f'(x)$ è non positiva per $x \in]0, 2/3]$, pertanto $f(x)$ è ivi decrescente. Dal segno di $f'(x)$ si deduce che $x = 2/3$ è un punto di minimo relativo. Inoltre, essendo $f'(x) > 0$ nell'intorno di $x = 1$, si deduce che in $x = 1$ la funzione ha un flesso *ascendente* a tangente verticale. Non essendo $f(x)$ limitata inferiormente né superiormente, non esistono né minimi né massimi assoluti.

7. Derivata seconda $f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4(x-1)^5}}$. Si noti che il dominio di $f''(x)$ è lo stesso di quello di $f'(x)$ e che $f''(x) \neq 0$, quindi non ci sono altri flessi oltre a quello già visto in $x = 1$ (punto di non derivabilità sia per la derivata prima che per la seconda). Dallo studio del segno di $f''(x)$ si deduce che $f''(x) > 0$ per $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ pertanto $f(x)$ è ivi convessa, mentre è concava per $x \in]1, +\infty[$.

In figura 3 è riportato il grafico di $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ e del suo asintoto obliquo $y = x - 1/3$.

21.4 Esercizio

Studiare la funzione $f(x) = \frac{\log x}{1 + \log x}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

21.4.1 Risoluzione

1. Dominio: $x > 0 \wedge (1 + \log x) \neq 0 \Rightarrow x \in]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[$.

2. Né simmetrie né periodicità.

3. Intersezioni con gli assi. $x = 0$ è escluso dal dominio e quindi non si può calcolare. $y = 0 \Rightarrow x = 1$.

4. Segno: $f(x)$ è non negativa per $x \in]0, 1/e[\cup[1, +\infty[$.

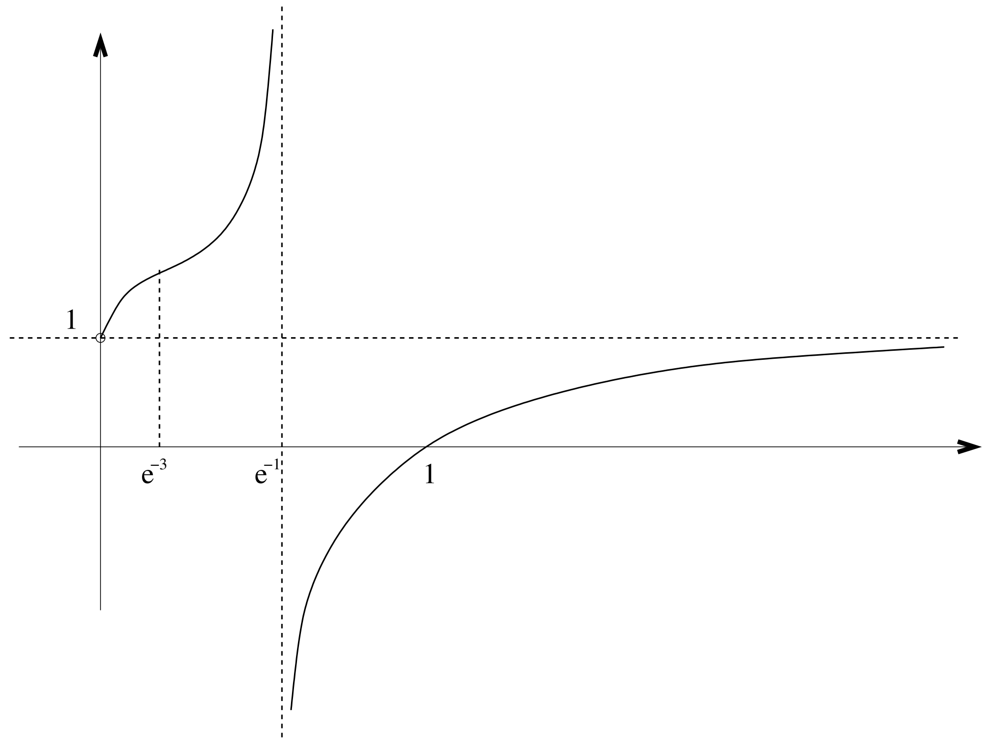

Figura 4: Grafico di $f(x) = \dfrac{\log x}{1 + \log x}$ e dei suoi asintoti orizzontale $y = 1$ e verticale $x = 1/e$ (esercizio 21.4)

5. Limiti, nell'ordine: $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\log x}{1 + \log x} = 1^+$; $\lim_{x \to (1/e)^-} \dfrac{\log x}{1 + \log x} = +\infty$; $\lim_{x \to (1/e)^+} \dfrac{\log x}{1 + \log x} = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\log x}{1 + \log x} = 1$. Dall'analisi dei limiti si deduce che $f(x)$ ammette la retta $y = 1$ come asintoto orizzontale (destro) e la retta $x = \frac{1}{e}$ come asintoto verticale. $f(x)$ non ammette asintoti obliqui.

6. Derivata prima $f'(x) = \dfrac{1}{x(1 + \log x)^2}$. Nonostante essa abbia lo stesso dominio di $f(x)$, $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$ e quindi per $x \to 0^+$ la funzione tende a 1^+ con tangente verticale (positiva). $f'(x)$ non si annulla mai, quindi non ci sono punti stazionari (eventuali massimi o minimi) ma è sempre positiva, quindi $f(x)$ è sempre crescente per $x \in]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[$.

7. Derivata seconda $f''(x) = -\dfrac{\log x + 3}{x^2(1 + \log x)^3}$. $f''(x) = 0$ per $x = 1/e^3$, che risulta pertanto punto di flesso. Dallo studio del segno di $f''(x)$ si deduce che $f''(x) > 0$ per $x \in]1/e^3, 1/e[$ pertanto $f(x)$ è ivi convessa, mentre è concava per $x \in]0, 1/e^3[\cup]1/e, +\infty[$.

In figura 4 è riportato il grafico di $f(x) = \dfrac{\log x}{1 + \log x}$ e dei suoi asintoti orizzontale $y = 1$ e verticale $x = 1/e$.

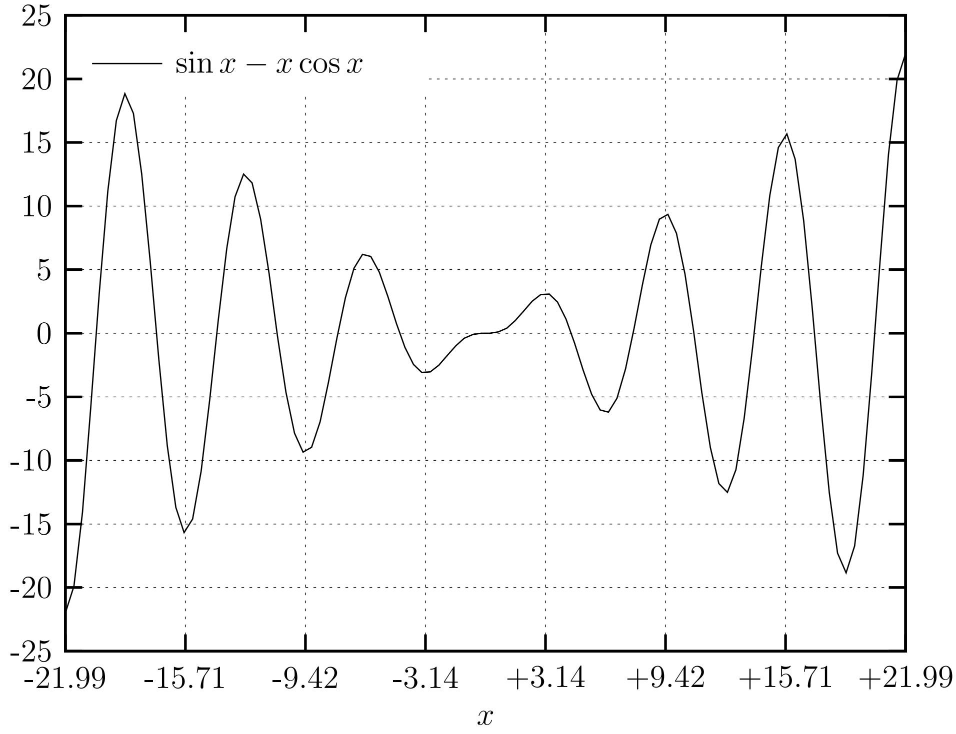

Figura 5: Grafico di $f(x) = \sin x - x \cos x$ (esercizio 21.5)

21.5 Esercizio

Studiare la funzione $f(x) = \sin x - x \cos x$ e tracciarne un grafico approssimativo.

21.5.1 Risoluzione

È una funzione dispari, definita su tutto $\mathbb{R}$, non periodica, quindi basta studiarla per $x \geq 0$. $x = 0 \Rightarrow y = 0$, ma la soluzione di $f(x) = 0$ implica $\sin x - x \cos x = 0$ ovvero, posto $x \neq \pi/2 + k\pi$ si può tentare di risolvere $\tan x = x$, che non è banale. Lasciando quindi perdere il segno e le intersezioni con $y = 0$, studiamo la derivata prima. $f'(x) = x \sin x$. Limitatamente a $x > 0$, si ha $f'(x) > 0$ quando $\sin x > 0$, ovvero per $x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[, k = 0, 1, 2, \ldots$. La derivata prima si annulla in $x = 0$, $x = 2k\pi, k = 1, 2, 3, \ldots$ e $x = (2k+1)\pi, k = 0, 1, 2, \ldots$. I punti $x = 2k\pi, k = 1, 2, 3, \ldots$ $(f(2k\pi) = -2k\pi)$ sono punti di minimo relativo. I punti $x = (2k+1)\pi, k = 0, 1, 2, \ldots$ $(f((2k+1)\pi) = (2k+1)\pi)$ sono punti di massimo relativo. La derivata seconda $f''(x) = \sin x + x \cos x$ si annulla in corrispondenza delle soluzioni dell'equazione $x + \tan x = 0$, una delle quali è $x = 0$, punto di flesso a tangente orizzontale. In figura 5 è riportato il grafico di $f(x) = \sin x - x \cos x$.

22 Esistenza delle radici di un'equazione

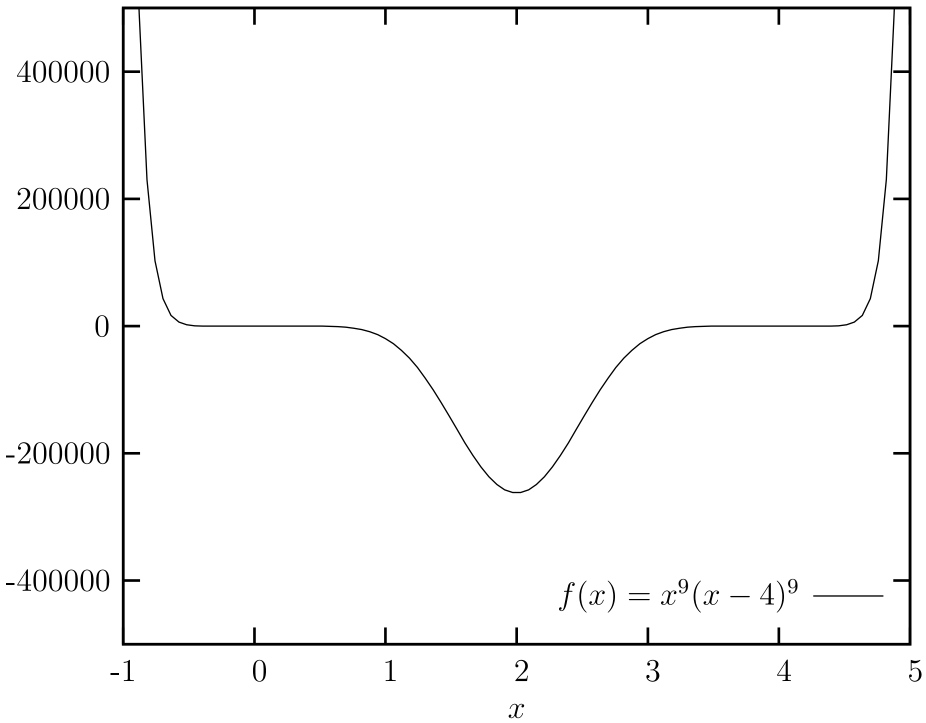

Figura 6: Grafico di $f(x) = x^9(x-4)^9$ (esercizio 22.1)

22.1 Esercizio

Determinare il numero delle soluzioni reali dell'equazione $x^9(x-4)^9 = \alpha$.

22.1.1 Risoluzione

Studiamo la funzione $f(x) = x^9(x-4)^9$. Si verifica che $f'(x)$ si annulla per $x = 2$, è positiva per $x > 2$ e negativa per $x < 2$. Quindi $f(x)$ è strettamente decrescente per $x \in]-\infty, 2]$, strettamente crescente per $x \in [2, -\infty[$ ed ha un minimo assoluto in $x = 2 \Rightarrow f(2) = -2^{18}$ (si veda la figura 6). In conclusione, quindi, l'equazione $x^9(x-4)^9 = \alpha$ ammette due soluzioni (distinte) se $\alpha > -2^{18}$, una soluzione se $\alpha = -2^{18}$, nessuna soluzione se $\alpha < -2^{18}$.

Alternativamente, si poteva considerare l'equazione $x(x-4) = \alpha^{1/9}$, che è di secondo grado e ammette soluzioni $x = 2 \pm \sqrt{4 + \alpha^{1/9}}$, purché sia $\alpha \geq -4^9 = -2^{18}$ (da cui le stesse conclusioni ottenute nel primo modo).

22.2 Esercizio

Determinare il numero delle soluzioni reali dell'equazione $x^{10}(x-2)^{10} = \alpha$.

22.2.1 Risoluzione

Procedendo come nell'esercizio precedente, si ottiene: nessuna soluzione per $\alpha < 0$, due soluzioni per $\alpha = 0$, quattro soluzioni per $0 < \alpha < 1$, tre soluzioni per $\alpha = 1$ e due soluzioni per $\alpha > 1$.

22.3 Esercizio

Determinare il numero ed il segno delle radici reali dell'equazione $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.

22.3.1 Risoluzione

Si noti che i limiti per $x \to \pm\infty$ di $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ sono rispettivamente $\pm\infty$ e pertanto esiteranno $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Quindi, in base al teorema di esistenza degli zeri ($f(x)$ è continua su $[a, b]$, intervallo chiuso e limitato), $f(x)$ ammette almeno una radice compresa tra a e b. Essendo $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$. Ne segue che $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ ammette una sola radice. Per stabilirne il segno, basta osservare che $f(0) = -20 < 0$ e quindi $f(x)$ si annulla per $x > 0$. L'unica radice è pertanto positiva.

22.4 Esercizio

Determinare il numero ed il segno delle radici reali dell'equazione $x^4 + x^2 = ax + b$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0$.

22.4.1 Risoluzione

Si proceda pensando all'intersezione tra le funzioni $f(x) = x^4 + x^2$ e $g(x) = ax + b$.

23 Integrali indefiniti immediati (o quasi)

Richiami utili per il calcolo degli integrali

- Proprietà:
  1. $\displaystyle\int f(x)\;dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$, ovvero le primitive di una funzione $f(x)$ differiscono tutte per una costante.
  2. $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\;dx = \int f(x)\;dx \pm \int g(x)\;dx$
  3. $\displaystyle\int kf(x)\;dx = k\int g(x)\;dx$
- Integrali immediati, o quasi, vedi tabella 23, pagina 85

Integrali fondamentali		Altri integrali notevoli	
$\int x^{\alpha}\,dx$	$= \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \neq -1$	$\int f'(x)\cdot[f(x)]^{\alpha}\,dx$	$= \dfrac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \neq -1$
$\int \dfrac{1}{x}\,dx$	$= \log\lvert x\rvert + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$= \log\lvert f(x)\rvert + c$
$\int a^x\,dx$	$= \dfrac{a^x}{\log a} + c,\ a > 0 \wedge a \neq 1$	$\int f'(x)\cdot a^{f(x)}\,dx$	$= \dfrac{a^{f(x)}}{\log a} + c,\ a > 0 \wedge a \neq 1$
$\int e^x\,dx$	$= e^x + c$	$\int f'(x)\cdot e^{f(x)}\,dx$	$= e^{f(x)} + c$
$\int \sin x\,dx$	$= -\cos x + c$	$\int f'(x)\cdot\sin[f(x)]\,dx$	$= -\cos[f(x)] + c$
$\int \cos x\,dx$	$= \sin x + c$	$\int f'(x)\cdot\cos[f(x)]\,dx$	$= \sin[f(x)] + c$
$\int \dfrac{1}{(\cos x)^2}\,dx$	$= \tan x + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{[\cos f(x)]^2}\,dx$	$= \tan[f(x)] + c$
$\int \dfrac{1}{(\sin x)^2}\,dx$	$= -\cot x + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{[\sin f(x)]^2}\,dx$	$= -\cot[f(x)] + c$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$= \arcsin x + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx$	$= \arcsin[f(x)] + c$
$\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$	$= \arctan x + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx$	$= \arctan[f(x)] + c$

Tabella 1: Tabella degli integrali notevoli

23.1 Esercizio

Calcolare i seguenti integrali.

$$\int \cot x\,dx \qquad [\log\lvert\sin x\rvert + c] \qquad\qquad \int \tan x\,dx \qquad [-\log\lvert\cos x\rvert + c]$$

$$\int \sin(ax)\,dx \qquad \left[-\frac{1}{a}\cos(ax) + c\right] \qquad\qquad \int \cos(ax)\,dx \qquad \left[\frac{1}{a}\sin(ax) + c\right]$$

$$\int \sqrt{x}\,dx \qquad \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c\right] \qquad\qquad \int \frac{1}{\sqrt{x+a}}\,dx \qquad [2\sqrt{x+a} + c]$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a+x^2}}\,dx \qquad [\sqrt{a+x^2} + c] \qquad\qquad \int \frac{x}{\sqrt{a-x^2}}\,dx \qquad [-\sqrt{a-x^2} + c]$$

23.1.1 Risoluzione

Si applichino le conoscenze relative agli integrali immediati ed altri integrali notevoli (vedi tabella 23, pagina 85).

23.2 Esercizio

Dimostrare, sotto l'ipotesi $a > 0$, le seguenti uguaglianze.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \arcsin \frac{x}{a} + c \qquad \int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

23.2.1 Risoluzione

Si applichino le conoscenze relative agli integrali immediati ed altri integrali notevoli (vedi tabella 23, pagina 85).

23.3 Esercizio

Calcolare i seguenti integrali.

$$\int \frac{1}{(5x+3)^6}\, dx \qquad \left[-\frac{1}{25(5x+3)^5} + c\right] \qquad \int \sqrt{x+2}\, dx \qquad \left[\tfrac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} + c\right]$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\, dx \qquad \left[-\frac{1}{3}\sqrt{2-3x^2} + c\right] \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx \qquad \left[-\arcsin \tfrac{1}{x} + c\right]$$

$$\int \sin^5 x \cos x\, dx \qquad \left[\frac{1}{6}\sin^6 x + c\right] \qquad \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad \left[\frac{1}{3}(\arcsin x)^3 + c\right]$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\, dx \qquad [\log|\arctan x| + c] \qquad \int \frac{1}{(\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad [\log|\arcsin x| + c]$$

$$\int \frac{1}{x \log x}\, dx \qquad [\log|\log x| + c] \qquad \int \frac{(\log x)^n}{x}\, dx,\ n \neq -1 \qquad \left[\frac{(\log x)^{n+1}}{n+1} + c\right]$$

$$\int \frac{\sin(2x)}{1+(\sin x)^2}\, dx \qquad [\log(1+(\sin x)^2) + c] \qquad \int 3xe^{x^2}\, dx \qquad \left[\frac{3}{2}e^{x^2} + c\right]$$

23.3.1 Risoluzione

Si applichino le conoscenze relative agli integrali immediati ed altri integrali notevoli (vedi tabella 23, pagina 85).

24 Integrali che richiedono alcune manipolazioni della funzione integranda

Negli esercizi che seguono sarà necessario manipolare la funzione integranda in modo da ricondursi ad integrali immediati (o quasi) visti precedentemente.

24.1 Esercizio

Tenendo conto delle uguaglianze goniometriche note, calcolare i seguenti integrali.

$$1. \quad \int \sin^2 x \, dx \qquad 2. \quad \int \cos^2 x \, dx$$

24.1.1 Risoluzione

Dalla formula di duplicazione del coseno $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ si ha

1. $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos(2x)}{2}$, quindi $\displaystyle\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}\, dx - \int \frac{\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4} + c.$
2. Osservando che $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$, si ottiene $\displaystyle\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}\, dx + \int \frac{\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4} + c.$

24.2 Esercizio

Tenendo conto delle uguaglianze goniometriche note, calcolare i seguenti integrali.

$$1. \quad \int \frac{1}{\sin x}\, dx \qquad 2. \quad \int \frac{1}{\cos x}\, dx$$

24.2.1 Risoluzione

Dalla formula di duplicazione del seno $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ si ottiene $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, da cui

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, dx = \int \frac{1}{2}\frac{1}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\, dx = \int \frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}}\, dx = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c.$
   Si dimostri, per esercizio ed utilizzando gli stessi passaggi, che in generale vale la seguente
   $$\int \frac{1}{\sin(x+a)}\, dx = \log\left|\tan\left(\frac{x+a}{2}\right)\right| + c \qquad (1)$$

2. Utilizzando la (1), dopo aver osservato che $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, si ottiene
$\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{2})}\, dx = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$

24.3 Esercizio

Tenendo conto delle uguaglianze goniometriche note, calcolare i seguenti integrali.

$$1.\ \int \frac{1}{\sin x \cos x}\, dx \qquad 2.\ \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$$

24.3.1 Risoluzione

1. $\int \frac{1}{\sin x \cos x}\, dx = \int \frac{1}{\tan x \cos^2 x}\, dx = \log|\tan x| + c$

2. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2}\, dx = \int \frac{1}{[(\sin(2x))/2]^2}\, dx = 2\int \frac{(2x)'}{[\sin(2x)]^2}\, dx =$
$-2\cot(2x) + c$

24.4 Esercizio

Dimostrare le seguenti uguaglianze.

1. $\int \frac{hx + k}{mx + n}\, dx = \frac{h}{m}x + \frac{km - hn}{m^2}\log|mx + n| + c$

2. $\int \frac{hx + k}{mx^2 + n}\, dx = \frac{h}{2m}\log|mx^2 + n| + \frac{k}{\sqrt{mn}}\arctan\left(\sqrt{\frac{m}{n}}x\right) + c, \quad m \cdot n > 0$

24.4.1 Risoluzione

1. $\int \frac{hx + k}{mx + n}\, dx = \frac{1}{m}\int \frac{hmx + mk}{mx + n}\, dx = \frac{1}{m}\int \frac{hmx + mk + hn - hn}{mx + n}\, dx =$
$\frac{1}{m}\int \frac{h(mx + n) + km - hn}{mx + n}\, dx = \frac{h}{m}\int 1\, dx + \frac{km - hn}{m^2}\int \frac{m}{mx + n}\, dx =$
$\frac{h}{m}x + \frac{km - hn}{m^2}\log|mx + n| + c$

2. $\int \frac{hx + k}{mx^2 + n}\, dx = h\int \frac{x}{mx^2 + n}\, dx + k\int \frac{1}{mx^2 + n}\, dx =$
$\frac{h}{2m}\int \frac{2mx}{mx^2 + n}\, dx + \frac{k}{n}\frac{1}{\sqrt{m/n}}\int \frac{\sqrt{m/n}}{(\sqrt{m/n}x)^2 + 1}\, dx =$
$\frac{h}{2m}\log|mx^2 + n| + \frac{k}{\sqrt{mn}}\arctan\left(\sqrt{\frac{m}{n}}x\right) + c$

24.5 Esercizio

Calcolare $\int \frac{3x + 2}{4x + 5}\, dx$.

24.5.1 Risoluzione

Eseguendo gli stessi passaggi del primo esempio dell'esercizio precedente, si ottiene $\int \frac{3x+2}{4x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{12x+8}{4x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{12x+8+15-15}{4x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{12x+15-7}{4x+5}\,dx = \frac{3}{4}\int 1\,dx - \frac{7}{4}\int \frac{1}{4x+5}\,dx = \frac{3}{4}x - \frac{7}{16}\log|4x+5| + c.$
Alternativamente, bastava sostituire $h=3, k=2, m=4, n=5$ nella formula risolutiva vista nell'esempio 1 dell'esercizio 24.4.

24.6 Esercizio

Calcolare $\int \frac{1}{3x^2+2}\,dx$.

24.6.1 Risoluzione

Eseguendo gli stessi passaggi del secondo esempio dell'esercizio 24.4, si ottiene $\int \frac{1}{3x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{2}x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{3}{2}x\right) + c.$
Alternativamente, bastava sostituire $h=0, k=1, m=3, n=2$ nella formula risolutiva vista nell'esempio 2 dell'esercizio 24.4.

24.7 Esercizio

Dimostrare, nel caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la seguente uguaglianza

$$\int \frac{hx+k}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{h}{2a}\log|ax^2+bx+c| + \frac{2ak-bh}{a\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + c$$

24.7.1 Risoluzione

$\frac{hx+k}{ax^2+bx+c} = h\frac{x+k/h}{ax^2+bx+c} = \frac{h}{2a}\cdot\frac{2ax+2ak/h}{ax^2+bx+c} = \frac{h}{2a}\cdot\frac{2ax+2ak/h+b-b}{ax^2+bx+c} = \frac{h}{2a}\cdot\left[\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{2ak/h-b}{ax^2+bx+c}\right].$
Quindi, $\int \frac{hx+k}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{h}{2a}\cdot\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \int \frac{h}{2a}\cdot\frac{2ak/h-b}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{h}{2a}\log|ax^2+bx+c| + \int \frac{h}{2a}\cdot\frac{2ak/h-b}{ax^2+bx+c}\,dx.$
Per integrare la seconda parte, si osservi che $\frac{h}{2a}\cdot\frac{2ak/h-b}{ax^2+bx+c} = \frac{2ak-bh}{2}\cdot\frac{1}{a^2x^2+abx+ac} = \frac{2ak-bh}{2}\cdot\frac{1}{(ax+\frac{b}{2})^2+ac-\frac{b^2}{4}} = \frac{2ak-bh}{2}\cdot\frac{1}{(ax+\frac{b}{2})^2+\frac{4ac-b^2}{4}} = \frac{2ak-bh}{2}\cdot\frac{1/(\frac{4ac-b^2}{4})}{\frac{4}{4ac-b^2}(ax+\frac{b}{2})^2+1} =$

$\frac{2ak-bh}{2} \cdot \frac{4}{4ac-b^2} \cdot \frac{1}{(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})^2+1} = \frac{2ak-bh}{2} \cdot \frac{4}{4ac-b^2} \cdot \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \cdot \frac{\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}}{(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})^2+1} =$
$\frac{2ak-bh}{a\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \frac{\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}}{(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})^2+1}$.
Pertanto, $\int \frac{h}{2a} \cdot \frac{2ak/h-b}{ax^2+bx+c}\, dx = \frac{2ak-bh}{a\sqrt{4ac-b^2}} \int \frac{\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}}{(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})^2+1}\, dx =$
$\frac{2ak-bh}{a\sqrt{4ac-b^2}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + c$. Sommando i due contributi si ottiene l'uguaglianza data. Si noti che il risultato del secondo integrale dell'esercizio 24.4 si ottiene immediatamente dalla formula precedente ponendo $a = m, b = 0, c = n$.

24.8 Esercizio

Calcolare $\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\, dx$.

24.8.1 Risoluzione

Eseguendo gli stessi passaggi dell'esercizio precedente, si ottiene $\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\, dx =$
$\frac{3}{2}\int \frac{2x+4/3}{x^2+x+1}\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1+4/3-1}{x^2+x+1}\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1+1/3}{x^2+x+1}\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx +$
$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx = \frac{3}{2}\log|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\, dx = \frac{3}{2}\log(x^2+x+1) +$
$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dx = \frac{3}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c =.$
Alternativamente, bastava sostituire $h = 3, k = 2, a = 1, b = 1, c = 1$ nella formula risolutiva vista nell'esercizio 24.7.

25 Integrali per parti

Richiami utili al calcolo di integrali per parti.

- L'integrazione per parti utilizza l'uguaglianza

$$\int [f'(x) \cdot g(x)]\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int [f(x) \cdot g'(x)]\, dx$$

- Schema riassuntivo per la scelta di $f'(x)$ e $g(x)$ nel caso si abbia l'integrale del loro prodotto: vedi tabella 2. Si noti che $1 = x^0$ rientra nel caso x^n.

25.1 Esercizio

Calcolare $\int x \cos x\, dx$.

$f'(x)$		$g(x)$
$\sin x$	se moltiplicato per	x^n
$\cos x$	se moltiplicato per	x^n
e^x	se moltiplicato per	x^n
x^n	se moltiplicato per	$\log x$
x^n	se moltiplicato per	$\arcsin x$
x^n	se moltiplicato per	$\arccos x$
x^n	se moltiplicato per	$\arctan x$
x^n	se moltiplicato per	$\text{arccot}\, x$

Tabella 2: Scelta di $f'(x)$ e $g(x)$ nell'integrazione per parti $\int [f'(x) \cdot g(x)]\, dx$

25.1.1 Risoluzione

Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 91, $f'(x) = \cos x$ e $g(x) = x$, si ha $f(x) = \int \cos x\, dx = \sin x$ e $g'(x) = 1$, quindi $\displaystyle\int x \cos x\, dx = x \cdot \sin x - \int \sin x\, dx = x \cdot \sin x + \cos x + c$.

25.2 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int x \log x\, dx$.

25.2.1 Risoluzione

Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 91, $f'(x) = x$ e $g(x) = \log x$, si ha $f(x) = x^2/2$ e $g'(x) = 1/x$, quindi $\displaystyle\int x \log x\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \log x - \frac{1}{2} \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \left(\log x - \frac{1}{2} \right) + c$.

25.3 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int \log x\, dx$.

25.3.1 Risoluzione

Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 91, $f'(x) = 1$ e $g(x) = \log x$, si ha $f(x) = x$ e $g'(x) = 1/x$, quindi $\displaystyle\int \log x\, dx = x \cdot \log x - \int 1\, dx = x\,(\log x - 1) + c$.

25.4 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int \arctan x\, dx$.

25.4.1 Risoluzione

Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 91, $f'(x) = 1$ e $g(x) = \arctan x$, si ha $f(x) = x$ e $g'(x) = 1/(1+x^2)$, quindi $\displaystyle\int \arctan x \, dx = x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c$.

25.5 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx$.

25.5.1 Risoluzione

Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 91, $f'(x) = e^x$ e $g(x) = x^2$, si ha $f(x) = e^x$ e $g'(x) = 2x$, quindi $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - 2\left(x \cdot e^x - \int e^x \, dx\right) + c = e^x(x^2 - 2x + 2) + c$.

25.6 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int (\log x)^2 \, dx$.

25.6.1 Risoluzione

Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 91, $f'(x) = 1$ e $g(x) = (\log x)^2$, si ha $f(x) = x$ e $g'(x) = \dfrac{2}{x}\log x$, quindi $\displaystyle\int (\log x)^2 \, dx = x \cdot (\log x)^2 - 2\int \log x \, dx = x\left[(\log x)^2 - 2\log x + 2\right] + c$.

25.7 Esercizio

Calcolare, per parti, $\displaystyle\int (\sin x)^2 \, dx$.

25.7.1 Risoluzione

Scegliendo $f'(x) = \sin x$ e $g(x) = \sin x$, si ha $f(x) = -\cos x$ e $g'(x) = \cos x$, quindi $\displaystyle\int (\sin x)^2 \, dx = -\sin x \cdot \cos x + \int (\cos x)^2 \, dx = -\sin x \cdot \cos x + \int [1 - (\sin x)^2] \, dx = -\sin x \cdot \cos x + \int 1 \, dx - \int \sin x)^2 \, dx$, ovvero $\displaystyle\int (\sin x)^2 \, dx = -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin x)^2 \, dx$, da cui $\displaystyle\int (\sin x)^2 \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c$ (si confronti questo risultato con l'esercizio 24.1).

25.8 Esercizio

Calcolare, per parti, $\displaystyle\int \frac{x}{(\sin x)^2}\,dx$.

25.8.1 Risoluzione

Scegliendo $f'(x) = \dfrac{1}{(\sin x)^2}$ e $g(x) = x$, si ha $f(x) = -\cot x$ e $g'(x) = 1$, quindi $\displaystyle\int \frac{x}{(\sin x)^2}\,dx = -x \cdot \cot x + \log|\sin x| + c$.

26 Integrali indefiniti di funzioni razionali fratte

Richiami utili per l'integrazione di funzioni razionali fratte.

- Chiamiamo *funzione razionale fratta* una funzione che è il rapporto di due polinomi $P_m(x)$ e $Q_n(x)$, rispettivamente di grado m ed n, ossia una funzione del tipo

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{p_m x^m + p_{m-1}x^{m-1} + \cdots + p_1 x + p_0}{q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0}, \qquad m, n \in \mathbb{N}.$$

- Se $m \geq n$, ossia se il grado del numeratore è maggiore o uguale a quello del denominatore, allora si può eseguire la divisione ottenendo

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = H_{m-n}(x) + \frac{R_l(x)}{Q_n(x)}, \qquad m, n, l \in \mathbb{N} \wedge l < n$$

  dove $H_{m-n}(x)$ è il quoziente (di grado $m - n$) e $R(x)$ il resto (di cui a priori si sa solo che ha grado inferiore al divisore $Q_n(x)$, ossia $l < n$).

  Essendo $H(x)$ un polinomio, il suo integrale è immediato. Al contrario, l'integrale di $\dfrac{R_l(x)}{Q_n(x)}$ (con $l < n$) non lo è, e viene qui di seguito discusso nel dettaglio.

- $\displaystyle\int \frac{R_l(x)}{Q_n(x)}\,dx, \quad l < n$. Ci sono due casi:

  1. $R_l(x) = k \cdot Q'_n(x)$, ovvero il numeratore è direttamente proporzionale alla derivata del denominatore. In questo caso l'integrale è immediato e vale $\displaystyle\int \frac{R_l(x)}{Q_n(x)}\,dx = \int \frac{k \cdot Q'_n(x)}{Q_n(x)}\,dx = k \log|Q_n(x)| + c$.
  2. Più in generale, il rapporto di due polinomi $\dfrac{R_l(x)}{Q_n(x)}$ $(l < n)$ può sempre essere

riscritto come

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{11}}{x+B_1} + \frac{A_{12}}{(x+B_1)^2} + \dots + \frac{A_{1\gamma_1}}{(x+B_1)^{\gamma_1}} + \\ & \frac{A_{21}}{x+B_2} + \frac{A_{22}}{(x+B_2)^2} + \dots + \frac{A_{2\gamma_2}}{(x+B_2)^{\gamma_2}} + \\ & \dots + \\ & \frac{A_{k1}}{x+B_k} + \frac{A_{k2}}{(x+B_k)^2} + \dots + \frac{A_{k\gamma_k}}{(x+B_k)^{\gamma_k}} + \\ & \frac{C_{11}x+D_{11}}{x^2+E_1x+F_1} + \frac{C_{12}x+D_{12}}{(x^2+E_1x+F_1)^2} + \dots + \frac{C_{1\mu_1}x+D_{1\mu_1}}{(x^2+E_1x+F_1)^{\mu_1}} + \\ & \frac{C_{21}x+D_{21}}{x^2+E_2x+F_2} + \frac{C_{22}x+D_{22}}{(x^2+E_2x+F_2)^2} + \dots + \frac{C_{2\mu_2}x+D_{2\mu_2}}{(x^2+E_2x+F_2)^{\mu_2}} + \\ & \dots + \\ & \frac{C_{h1}x+D_{h1}}{x^2+E_hx+F_h} + \frac{C_{h2}x+D_{h2}}{(x^2+E_hx+F_h)^2} + \dots + \frac{C_{h\mu_h}x+D_{h\mu_h}}{(x^2+E_hx+F_h)^{\mu_h}},\end{aligned}$$

dove il generico trinomio $x^2 + E_hx + F_h$ è *non scomponibile*, ovvero tale per cui $\Delta = E_h^2 - 4F_h < 0$.

L'integrale originario si riduce pertanto alla somma di integrali immediati del tipo

(a) $\displaystyle\int \frac{A_{1\gamma_2}}{(x+B_1)^{\gamma_2}}\,dx = \frac{A_{1\gamma_2}}{1-\gamma_2}(x+B_1)^{1-\gamma_2} + c$ e

(b) $\displaystyle\int \frac{C_{h\mu_h}x+D_{h\mu_h}}{(x^2+E_hx+F_h)^{\mu_h}}\,dx$. Per risolvere quest'ultimo, si ricordi la formula:

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{a}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{b-ap/2}{b^{2n-1}} I_n\left(\frac{x+p/2}{b}\right) + c,$$

essendo la funzione $I_n(t)$ ottenuta ricorsivamente da $I_1(t) = \arctan(t)$ e $I_{n+1}(t) = \dfrac{t}{2n(t^2+1)^n} + \dfrac{2n-1}{2n} I_n(t)$.

26.1 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x+5}{x^3+4x^2+x-6}\,dx$.

26.1.1 Risoluzione

Procediamo dapprima alla scomposizione dell'integranda:
$\dfrac{2x^2+5x+5}{x^3+4x^2+x-6} = \dfrac{2x^2+5x+5}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x+3} = \dots =$
$\dfrac{x^2(A+B+C) + x(5A+2B+C) + (6A-3B-2C)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$. Imponendo l'uguaglianza tra i coefficienti del numeratore della prima e quelli dell'ultima frazione si ha:

$$\begin{cases} A+B+C &= 2 \\ 5A+2B+C &= 5 \\ 6A-3B-2C &= 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= 1 \\ B &= -1 \\ C &= 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{2x^2+5x+5}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3}.$$

L'integrale iniziale si riduce pertanto a $\int \frac{2x^2+5x+5}{x^3+4x^2+x-6}\, dx = \int \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3}\right] dx =$ $\log|x-1| - \log|x+2| + 2\log|x+3| + c = \log \frac{|x-1|(x+3)^2}{|x+2|} + c.$

26.2 Esercizio

Calcolare $\int \frac{x+5}{x^3-1}\, dx.$

26.2.1 Risoluzione

Procediamo dapprima alla scomposizione dell'integranda:
$\frac{x+5}{x^3-1} = \frac{x+5}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \cdots = \frac{x^2(A+B)+x(A-B+C)+(A-C)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$
Imponendo l'uguaglianza tra i coefficienti del numeratore della prima e quelli dell'ultima frazione si ha:

$$\begin{cases} A+B & = & 0 \\ A-B+C & = & 1 \\ A-C & = & 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A & = & 2 \\ B & = & -2 \\ C & = & -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+5}{x^3-1} = \frac{2}{x-1} - \frac{2x+3}{x^2+x+1}$$

L'integrale iniziale si riduce pertanto a $\int \frac{x+5}{x^3-1}\, dx = \int \left[\frac{2}{x-1} - \frac{2x+3}{x^2+x+1}\right] dx =$
$2\log|x-1| - \left[\log|x^2+x+1| + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] + c =$
$\log \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$

26.3 Esercizio

Calcolare $\int \frac{1}{x^2(x^2+x+1)}\, dx.$

26.3.1 Risoluzione

Procediamo dapprima alla scomposizione dell'integranda:
$\frac{1}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$. Svolgendo al solito modo, si ottiene:

$$\begin{cases} A & = & -1 \\ B & = & 1 \\ C & = & 1 \\ D & = & 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2(x^2+x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2+x+1}$$

L'integrale iniziale si riduce pertanto a $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2+x+1)}\,dx = \int \left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2+x+1}\right]\,dx =$
$\displaystyle -\log|x| - \frac{1}{x} + \left[\frac{1}{2}\log|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] + c =$
$\displaystyle -\frac{1}{x} + \log\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$

26.4 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^4+2x^2+1)}\,dx.$

26.4.1 Risoluzione

Procediamo dapprima alla scomposizione dell'integranda:
$\displaystyle\frac{1}{(x+1)(x^4+2x^2+1)} = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$. Svolgendo al solito modo, si ottiene:

$$\begin{cases} A &= 1/4 \\ B &= -1/4 \\ C &= 1/4 \\ D &= -1/2 \\ E &= 1/2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(x+1)(x^4+2x^2+1)} = \frac{1}{4(x+1)} + \frac{-x+1}{4(x^2+1)} + \frac{-x+1}{2(x^2+1)^2}$$

L'integrale iniziale si riduce pertanto a $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^4+2x^2+1)}\,dx =$
$\displaystyle\int \left[\frac{1}{4(x+1)} + \frac{-x+1}{4(x^2+1)} + \frac{-x+1}{2(x^2+1)^2}\right]\,dx =$,ovvero:
$\displaystyle\int \frac{1}{4(x+1)}\,dx = \frac{1}{4}\log|x+1|,$
$\displaystyle\int \frac{-x+1}{4(x^2+1)}\,dx = -\frac{1}{8}\log|x^2+1| + \frac{1}{4}\arctan x.$
Per il calcolo di $\displaystyle\int \frac{-x+1}{2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{-x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$ si utilizza la formula

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{a}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{b-ap/2}{b^{2n-1}} I_n\left(\frac{x+p/2}{b}\right) + c,$$

essendo la funzione $I_n(t)$ ottenuta ricorsivamente da $I_1(t) = \arctan(t)$ e $I_{n+1}(t) = \dfrac{t}{2n(t^2+1)^n} + \dfrac{2n-1}{2n} I_n(t)$. Nel nostro caso si ha $a=-1, b=1, p=0, q=1$ e quindi $t=x$, da cui $\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{-x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{2}I_2(x)$, essendo $I_1(x) = \arctan x$ e $\displaystyle I_2(x) = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x.$
In conclusione, $\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{-x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{2}\left[\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x\right]$ per cui

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^4+2x^2+1)}\ dx = \frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{8}\log|x^2+1| + \frac{1}{4}\arctan x + \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{x}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4}\arctan x + c = \frac{1}{4}\log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x+1}{4(x^2+1)} + c.$$

26.5 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^3}\ dx$.

26.5.1 Risoluzione

Si noti che $\Delta = 16 - 20 < 0$; utilizziamo pertanto la formula

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\ dx = \frac{a}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{b-ap/2}{b^{2n-1}} I_n\left(\frac{x+p/2}{b}\right) + c,$$

essendo la funzione $I_n(t)$ ottenuta ricorsivamente da $I_1(t) = \arctan(t)$ e $I_{n+1}(t) = \dfrac{t}{2n(t^2+1)^n} + \dfrac{2n-1}{2n} I_n(t)$. Nel nostro caso si ha $a = 0, b = 1, p = 4, q = 1$ e quindi
$t = (x+p/2)/b = x+2$, da cui
$I_1(x+2) = \arctan(x+2)$,
$I_2(x+2) = \dfrac{x+2}{2((x+2)^2+1)} + \dfrac{1}{2}\arctan(x+2)$,
$I_3(x+2) = \dfrac{x+2}{4((x+2)^2+1)^2} + \dfrac{3}{4}\left[\dfrac{x+2}{2((x+2)^2+1)} + \dfrac{1}{2}\arctan(x+2)\right]$. In conclusione,
$\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^3}\ dx = \frac{x+2}{4((x+2)^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{x+2}{2((x+2)^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x+2)\right] + c.$

27 Integrali indefiniti per sostituzione

Richiami utili per l'integrazione tramite sostituzione.

- L'integrale $\int f(x)\ dx$ viene riscritto utilizzando la sostituzione $x = \varphi(t)$, dopo aver osservato che $dx = D[\varphi(t)]\ dt$. Quindi

$$\int f(x)\ dx = \int [f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)]\ dt$$

- Nel caso di integrali *definiti* (si veda più avanti), la sostituzione va applicata anche agli estremi di integrazione:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_\alpha^\beta [f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)]\ dt, \quad \text{essendo} \quad a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta).$$

- Sostituzioni consigliate. Sia $R(\theta_1(x), \theta_1(x), \ldots, \theta_n(x))$ una funzione razionale delle funzioni $\theta_i(x), i = 1 \ldots n$, allora si consigliano le sostituzioni riportate in tabella 3.

Integrale	Sostituzione consigliata
$\int R(a^x)\ dx$	$a^x = t$
$\int R(\log_a x)\ dx$	$\log_a x = t$
$\int R(\sin x, \cos x)\ dx$	$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$
$\int R((\sin x)^2, (\cos x)^2, \sin x \cdot \cos x, \tan x, \cot x)\ dx$	$\tan x = t$
si noti che : $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\tan x = t \Rightarrow (\sin x)^2 = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad (\cos x)^2 = \frac{1}{1+t^2}$	

Tabella 3: Sostituzione consigliata per integrali di funzioni razionali di alcune funzioni trascendenti.

27.1 Esercizio

Calcolare $\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$.

27.1.1 Risoluzione

Eseguendo la sostituzione $x = a \sin t \Rightarrow dx = a \cos t\ dt$ si ha $\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \int \left[\sqrt{a^2 - a^2(\sin t)^2} \cdot (a \cos t)\right]\ dt = a^2 \int (\cos t)^2\ dt = \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) + c$. Essendo $x = a \sin t \Rightarrow t = \arcsin(x/a)$ e $\cos t = \sqrt{1 - x^2/a^2} = \sqrt{a^2 - x^2}/a$, e quindi $= \int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \frac{x}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + c = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$.

27.2 Esercizio

Calcolare $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$.

27.2.1 Risoluzione

Eseguendo la sostituzione $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\ dt$ si ha $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx = -2 \cos t + c = -2 \cos \sqrt{x} + c$.

27.3 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,dx$.

27.3.1 Risoluzione

Eseguendo la sostituzione $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$ si ha $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,dx = t^2\arctan t - t + \arctan t + c = x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + c$.

27.4 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int \sqrt{2^x - 1}\,dx$.

27.4.1 Risoluzione

Eseguendo la sostituzione $2^x - 1 = t^2 \Rightarrow x = \log_2(1+t^2) \Rightarrow dx = \dfrac{2t}{(1+t^2)\log 2}\,dt$ si ha $\displaystyle\int \sqrt{2^x-1}\,dx = \int \left[t \cdot \frac{2t}{(1+t^2)\log 2}\right] dt = \frac{2}{\log 2}\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \frac{2}{\log 2}\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt = \cdots = \frac{2}{\log 2}(t - \arctan t) + c = \frac{2}{\log 2}\left[\sqrt{2^x-1} - \arctan\sqrt{2^x-1}\right] + c$.

27.5 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int \cos(\log x)\,dx$ e $\displaystyle\int \sin(\log x)\,dx$.

27.5.1 Risoluzione

Eseguendo la sostituzione $\log x = t \Rightarrow x = e^t$ ed integrando per parti si ha
$\displaystyle\int \cos(\log x)\,dx = \frac{x}{2}[\sin(\log x) + \cos(\log x)] + c$ e
$\displaystyle\int \sin(\log x)\,dx = \frac{x}{2}[\sin(\log x) - \cos(\log x)] + c$.

27.6 Esercizio

Calcolare gli integrali

$$(a)\ \int \frac{1}{1+e^x}\,dx \qquad (b)\ \int \frac{1}{1-e^{2x}}\,dx \qquad (c)\ \int \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2}\,dx \qquad (d)\ \int \frac{e^x}{3e^{2x}-e^x+2}\,dx$$

27.6.1 Risoluzione

Eseguendo la sostituzione $e^x = t$ ed utilizzando le tecniche di integrazione già note, si ha rispettivamente (a) $x - \log(1+e^x) + c$, (b) $x - \frac{1}{2}\log|1-e^{2x}| + c$, (c) $\frac{1}{2}x - \log|e^x - 1| + \frac{1}{2}\log|e^x - 2| + c$, (d) $\frac{2}{\sqrt{23}}\arctan\frac{6e^x-1}{\sqrt{23}} + c$.

27.7 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx$.

27.7.1 Risoluzione

Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sin x$ si ha $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\, dx$. Eseguendo quindi la sostituzione $t = \cos x$ si ottiene $\frac{1}{2}[\log(1-\cos x) - \log(1+\cos x)] + c$. Si confronti questo risultato con l'esercizio 2.2 dell'esercitazione 11. Alternativamente, utilizzando le sostituzioni consigliate dalla tabella 3, basta porre $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$, da cui $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \dfrac{2}{1+t^2}\, dt$, ovvero

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \log|t| + c = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

27.8 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx$.

27.8.1 Risoluzione

Eseguendo la sostituzione $x+1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t\, dt$ si ha $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx =$

$$\int \frac{t^2-1}{t} 2t\, dt = \frac{2t^3}{3} - 2t + c = \frac{2(x+1)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{x+1} + c.$$

28 Integrali definiti

Richiami utili sugli integrali definiti. Siano $f(x), g(x)$ limitate ed integrabili su $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a, b, c \in I,\ a < b$. Allora:

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx = \int_c^b f(x)\, dx.$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0.$
- $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$
- Se $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$ con $a < b$, $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$

- $g(x) \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_a^b g(x)\ dx \geq 0.$

- $\displaystyle\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx + \mu \int_a^b g(x)\ dx.$

- $m \leq \left[\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx\right] \leq M$ essendo $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

- $f(x)$ continua su $[a,b] \Rightarrow \exists c \in [a,b]:\quad \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = f(c).$

- Integrazione per parti: $\displaystyle\int_a^b [f'(x)\cdot g(x)]\ dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b [f(x)\cdot g'(x)]\ dx.$

- Integrazione per sostituzione. Sia $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ derivabile con derivata continua. Allora: $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\ dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} [f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)]\ dt$

- Teorema fondamentale del calcolo integrale. Sia $f(x)$ continua ed integrabile su $[a,b]$ e $c, x \in [a,b]$, allora la funzione $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\ dt$ è una primitiva di $f(x)$. Inoltre, $F(x)$ è derivabile e risulta $F'(x) = f(x)$.

- Formula fondamentale per il calcolo integrale. Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = F|_a^b = [F]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$

- Significato geometrico: l'integrale definito $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ di una funzione *non negativa* $f(x)$ rappresenta l'area compresa tra il grafico della funzione $y = f(x)$, l'asse x e le rette verticali $x = a$ e $x = b$.

- Area tra due curve $f(x)$ e $g(x)$. Se le curve hanno due o più punti di intersezione di ascissa $x_i, i = 1,\ldots,n, \quad n \geq 2$, allora

  $$A = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)|\ dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)|\ dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} |f(x) - g(x)|\ dx.$$

  Si noti che $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ se $f(x) \geq g(x)$ oppure $|f(x) - g(x)| = g(x) - f(x)$ se $g(x) > f(x)$. Quindi, basta considerare per ciascun intervallo la differenza tra la funzione "maggiore" e quella "minore".

28.1 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\ dx.$

28.1.1 Risoluzione

Essendo $\int \sin x \; dx = -\cos x + c$, si ha $\int_0^{2\pi} \sin x \; dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$.

28.2 Esercizio

Calcolare $\int_0^{2\pi} (\sin x)^2 \; dx$.

28.2.1 Risoluzione

Essendo $\int (\sin x)^2 \; dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$ (si vedano le esercitazioni precedenti), si ha $\int_0^{2\pi} (\sin x)^2 \; dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$.

28.3 Esercizio

Calcolare $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} \; dx$.

28.3.1 Risoluzione

Essendo $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} \; dx = \frac{2(x+1)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{x+1} + c$ (si vedano le esercitazioni precedenti, integrali per sostituzione), si ha $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} \; dx = \left[\frac{2(x+1)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{x+1}\right]_0^3 = \left[\frac{2(4)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{4}\right] - \left[\frac{2(1)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{1}\right] = \frac{8}{3}$.

28.4 Esercizio

Calcolare $\int_0^3 |x-1| \; dx$.

28.4.1 Risoluzione

Essendo $|x-1| = x-1$ per $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ e $|x-1| = 1-x$ per $x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$, si ha $\int_0^3 |x-1| \; dx = \int_0^1 (1-x) \; dx + \int_1^3 (x-1) \; dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$.

28.5 Esercizio

Calcolare $\int_0^{2\pi} |\sin x| \; dx$.

28.5.1 Risoluzione

Si può procedere separando il $|\sin x|$ nei due casi (come fatto nell'esercizio precedente), oppure osservare che $f(x) = |\sin x|$ è periodica di periodo π per cui: $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x|\ dx = \int_0^{\pi} |\sin x|\ dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\ dx = \int_0^{\pi} |\sin x|\ dx + \int_0^{\pi} |\sin x|\ dx = 2\int_0^{\pi} |\sin x|\ dx = 2\int_0^{\pi} \sin x\ dx \quad (\sin x \geq 0 \forall\ x \in [0,\pi]) = [-2\cos x]_0^{\pi} = -2\cos(\pi) + 2\cos(0) = 2 + 2 = 4.$

28.6 Esercizio

Determinare l'area della regione di piano compresa tra la curva $y = \log x$, l'asse delle ascisse e la retta $x = e$.

28.6.1 Risoluzione

$A = \displaystyle\int_1^{e} \log x\ dx = [x(\log x - 1)]_1^{e} = 1.$

28.7 Esercizio

Determinare l'area della regione di piano compresa tra la parabola $y = x^2$ e la retta $y = x$.

28.7.1 Risoluzione

Si noti che le due curve si intersecano in due punti $(0,0)$ e $(1,1)$ e che nell'intervallo $[0,1]$ si ha $x \geq x^2$. Quindi l'area in questione è $\displaystyle\int_0^1 |x^2 - x|\ dx = \int_0^1 (x - x^2)\ dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$

28.8 Esercizio

Determinare l'area della regione di piano compresa tra la parabola $y = x^2$ e la retta $y = -2x + 3$.

28.8.1 Risoluzione

Le due curve si intersecano in $(-3,9)$ e $(1,1)$, inoltre nell'intervallo $[-3,1]$ si ha $-2x+3 \geq x^2$. Quindi l'area in questione è $\displaystyle\int_{-3}^{1} (-2x + 3 - x^2)\ dx = \left[-x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{1} = \frac{32}{3}.$

28.9 Esercizio

Determinare l'area della regione di piano compresa tra la parabola $y^2 = 4x$, la retta $2x + y - 4 = 0$ e l'asse delle ascisse.

28.9.1 Risoluzione

Si noti che la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse delle x e vertice nell'origine. Inoltre, le due curve si intersecano in $(1,2)$ e $(4,-4)$, e la retta $y=-2x+4$ interseca l'asse x in $x=2$. Vi sono pertanto due possibili regioni: $A_1=\displaystyle\int_0^1\sqrt{4x}\;dx+\int_1^2(-2x+4)\;dx=\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$ e $A_2=\displaystyle\int_0^2[0-(-\sqrt{4x})]\;dx+\int_2^4[(-2x+4)-(-\sqrt{4x})]\;dx=\frac{8}{3}\sqrt{2}+\frac{20-8\sqrt{2}}{3}=\frac{20}{3}$.

28.10 Esercizio

Determinare l'area della regione di piano delimitata nell'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

28.10.1 Risoluzione

Ricavando $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, l'area in questione è data da $A=4\cdot\displaystyle\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\;dx=$ (dopo aver posto $x=a\sin t$) $=4\cdot\dfrac{b}{a}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left[\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\right]\;dt=4ab\int_0^{\pi/2}(\cos t)^2dt=\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2}=4ab\frac{\pi}{4}=\pi ab.$

29 Integrali impropri

Richiami utili sugli integrali impropri.

- Sia $\alpha\in\mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\;dx$ è convergente per $\alpha>1$ e positivamente divergente per $\alpha\leq 1$.

- Sia $\alpha\in\mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio $\displaystyle\int_a^b\frac{1}{(x-a)^\alpha}\;dx$ è convergente per $\alpha<1$ e positivamente divergente per $\alpha\geq 1$.

- Criterio del confronto. Siano $f(x),g(x)$ due funzioni definite su $[a,+\infty[$ e integrabili in ogni intervallo limitato $[a,b]$ con $a<b$; se $g(x)$ è integrabile su $[a,+\infty[$ ed esiste $x_0\geq a$ tale che $0\leq f(x)\leq g(x)\quad\forall x\geq x_0$, allora anche $f(x)$ è integrabile su $[a,+\infty[$.

- Se l'integrale improprio $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\;dx$ è assolutamente convergente, allora l'integrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\;dx$ è convergente.

L'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ si dice assolutamente convergente se l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge.

29.1 Esercizio

Dopo averne discusso la convergenza, calcolare $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\, dx$ utilizzando la definizione.

29.1.1 Risoluzione

Il problema si verifica in $x = 2$. Si osservi che $\frac{1}{\sqrt{2-x}} = \frac{1}{(2-x)^{1/2}}$, pertanto l'integrale improprio converge $(1/2 < 1)$. Per calcolarne il valore si utilizza la definizione: $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\, dx = \lim_{t \to 2^-} \left[\int_1^t \frac{1}{\sqrt{2-x}}\, dx\right]$. Calcolando dapprima l'integrale indefinito $\int \frac{1}{\sqrt{2-x}}\, dx = \int (2-x)^{-1/2}\, dx = -2\sqrt{2-x} + c$, si ha $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\, dx = \lim_{t \to 2^-} \left[\int_1^t \frac{1}{\sqrt{2-x}}\, dx\right] = \lim_{t \to 2^-} \left[-2\sqrt{2-x}\right]_1^t = \lim_{t \to 2^-} \left[-2\sqrt{2-t} + 2\right] = 2$.

29.2 Esercizio

Dopo averne discusso la convergenza, calcolare $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$ utilizzando la definizione.

29.2.1 Risoluzione

Il problema si verifica in $x = 2$. Si osservi che $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} \sim \frac{1}{2(2-x)^{1/2}}$ per $x \to 2$, pertanto l'integrale improprio converge $(1/2 < 1)$. Si ha quindi $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \lim_{t \to 2^-} \left[\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx\right] = \lim_{t \to 2^-} \left[\arcsin \frac{x}{2}\right]_0^t = \lim_{t \to 2^-} \arcsin \frac{t}{2} = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

29.3 Esercizio

Siano $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutere, al variare di α, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\, dx$$

.

29.3.1 Risoluzione

Se $\alpha \neq 1$ si ha $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\int_a^t \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\, dx\right] = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{(\log x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^t =$ $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \left[\frac{(\log t)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{(\log a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]$. Pertanto l'integrale converge se $-\alpha+1<0$ ovvero per $\alpha>1$, mentre diverge se $-\alpha+1>0$ ovvero per $\alpha<1$.

Se $\alpha = 1$ si ha $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} [\log(\log x)\ dx]_a^t = \lim_{t\to+\infty} [\log(\log t) - \log(\log a)] =$ $+\infty$.

In conclusione, l'integrale dato converge per $\alpha > 1$ e diverge positivamente per $\alpha \leq 1$.

29.4 Esercizio

Siano $a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutere, al variare di α, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^a \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\, dx$$

29.4.1 Risoluzione

Si proceda come nell'esercizio precedente.

29.5 Esercizio

Senza eseguire l'integrazione, si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x}\, dx$$

29.5.1 Risoluzione

$\displaystyle\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} \sim \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2x^{3/2}}$ per $x \to +\infty$, pertanto l'integrale converge.

29.6 Esercizio

Senza eseguire l'integrazione, si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$$

29.6.1 Risoluzione

$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \to 0$ e $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ per $x \to 1$, pertanto l'integrale converge.

29.7 Esercizio

Senza eseguire l'integrazione, si discuta la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$(a) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) dx \qquad (b) \quad \int_1^{+\infty} \left(\sin\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

29.7.1 Risoluzione

(a) Essendo $\frac{1}{\sqrt{x}} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ per $x \to +\infty$, l'integrale converge.

(b) Essendo $\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2 \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$, l'integrale converge.

29.8 Esercizio

Senza eseguire l'integrazione, si discuta la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$(a) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\, dx \qquad (b) \quad \int_0^{1} \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}\, dx$$

29.8.1 Risoluzione

(a) Essendo $\frac{1}{\sqrt{\tan x}} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$ per $x \to 0$, l'integrale converge.

(b) Essendo $\frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$ per $x \to 0$, l'integrale converge.

29.9 Esercizio

Determinare il più piccolo valore di $n \in \mathbb{N}$ affinché l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2+1})^n}\, dx$ converga.

29.9.1 Risoluzione

Essendo $\frac{x}{(\sqrt{x^2+1})^n} \sim \frac{1}{x^{n-1}}$ per $x \to +\infty$, si ha convergenza per $n-1>1$, ovvero per $n>2$. Quindi il minor $n \in \mathbb{N}$ affinché l'integrale improprio converga è $n=3$.

29.10 Esercizio

Discutere al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(2x+3)^{b+1}}\, dx$$

29.10.1 Risoluzione

Per $x \to 0^+$ si ha $\dfrac{1}{x^a(2x+3)^{b+1}} \sim \dfrac{1}{3^{b+1}x^a}$, quindi l'integrale converge per $a < 1$.
Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{1}{x^a(2x+3)^{b+1}} \sim \dfrac{1}{2^{b+1}x^{a+b+1}}$, pertanto l'integrale converge per $a + b + 1 > 1$, ovvero $b > -a$.
Globalmente l'integrale converge per $a < 1 \wedge b > -a$.

29.11 Esercizio

Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^a}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$$

29.11.1 Risoluzione

Si noti che $\dfrac{(\log x)^a}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{(\log x)^a}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}$. Eseguendo la sostituzione $t = x-1 \Rightarrow x = 1+t$, si ha $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^a}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{(\log(1+t))^a}{\sqrt{t(t+2)}}\, dt$.
Per $t \to 0^+$ si ha $\dfrac{(\log(1+t))^a}{\sqrt{t(t+2)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}t^{1/2-a}}$, quindi l'integrale converge per $1/2 - a < 1$, ovvero per $a > 3/2$.
Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{(\log(1+t))^a}{\sqrt{t(t+2)}} \sim \dfrac{1}{t(\log t)^{-a}}$, pertanto l'integrale converge per $-a > 1 \Rightarrow a < -1$.
In conclusione, l'integrale dato *non converge*, essendo $a > 3/2 \wedge a < -1$ impossibile.

30 Funzione integrale

30.1 Esercizio

Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale ed il teorema per le derivate di funzioni composte, calcolare le derivate delle seguenti funzioni integrali:

$$(a)\ F(x) = \int_0^x \sqrt{t}\, dt \qquad (b)\ F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\, dt \qquad (c)\ F(x) = \int_{2x}^{3x} (\cos t)^2\, dt$$

.

30.1.1 Risoluzione

(a) $F'(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$
(b) $F'(x) = e^{(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^x.$

(c) $F(x) = \displaystyle\int_{2x}^{3x} (\cos t)^2 \ \ dt = \int_{2x}^{x_0} (\cos t)^2 \ \ dt + \int_{x_0}^{3x} (\cos t)^2 \ \ dt = \int_{x_0}^{3x} (\cos t)^2 \ \ dt - \int_{x_0}^{2x} (\cos t)^2 \ dt$. Pertanto $F'(x) = [\cos(3x)]^2 \cdot (3x)' - [\cos(2x)]^2 \cdot (3x)' = 3\cos^2(3x) - 2\cos^2(2x)$.

A Geometria Analitica

A.1 Il piano cartesiano

Punto medio di un segmento	$M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$	$(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ coordinate estremi
Distanza tra due punti	$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	$(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ coordinate punti

A.2 La retta

Definizione: nessuna perché è un *ente primitivo*.

Forma implicita	$ax+by+c=0$		tutte le rette
	$x=-\dfrac{c}{a}=k$		retta verticale ($b=0$)
	$y=-\dfrac{c}{b}=h$		retta orizzontale ($a=0$)
Forma esplicita	$y=mx+q$ $m=-\dfrac{b}{a}, q=-\dfrac{c}{a}$		non comprende rette verticali perché sono espressioni valide solo se $a\neq 0$
Date due rette	$ax+by+c=0$	e	$a'x+b'y+c=0$ si ha:
	$\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$		rette incidenti (una intersezione)
	$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$		rette parallele (nessuna intersezione)
	$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$		rette coincidenti (infinite intersezioni)
Date due rette	$m=m_1x+q_1$	e	$y=m_2x+q_2$ si ha:
	$m_1=m_2$		rette parallele
	$m_1m_2=-1\Leftrightarrow m_1=-\dfrac{1}{m_2}$		rette perpendicolari
Retta per un punto	$y-y_0=m(x-x_0)$		$(x_0;y_0)$ coordinate del punto
Retta per due punti	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$		$(x_1;y_1)$ e $(x_2;y_2)$ coordinate dei punti
Distanza punto retta	$d=\dfrac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$		Nota: retta in forma implicita

A.3 La circonferenza

Definizione: luogo geometrico dei punti del piano per i quali la distanza da un punto fisso detto *centro* è costante e congruente ad un segmento detto *raggio*.

Equazione noti centro $C(x_0; y_0)$ e raggio r	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
Equazione canonica	$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ $C\left(-\dfrac{\alpha}{2}; -\dfrac{\beta}{2}\right)$ $r = \sqrt{\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma}$

A.4 La parabola

Definizione: luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto *fuoco* e da una retta fissa detta *direttrice*.
La figura così ottenuta ha un *asse di simmetria*. Il punto di intersezione tra l'asse di simmetria e la figura stessa è detto *vertice*.

Asse parallelo all'asse delle ordinate	$y = ax^2 + bx + c$	$a > 0 \Leftrightarrow \smile, a < 0 \Leftrightarrow \frown$
Posto $\Delta = b^2 - 4ac$, si ha	$V\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$	Vertice
	$F\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$	Fuoco
	$x = -\dfrac{b}{2a}$	Asse di simmetria
	$y = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$	Direttrice
Asse parallelo all'asse delle ascisse	$x = ay^2 + by + c$	$a > 0 \Leftrightarrow (, a < 0 \Leftrightarrow)$
	$V\left(-\dfrac{\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$	Vertice
	$F\left(\dfrac{1-\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$	Fuoco
	$y = -\dfrac{b}{2a}$	Asse di simmetria
	$x = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$	Direttrice

A.5 L'ellisse

Definizione: luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti *fuochi*.
La figura così ottenuta ha due *assi di simmetria* (o più semplicemente assi), il maggiore dei quali è detto asse maggiore (su di esso si trovano i fuochi) e l'altro asse minore. Il punto di intersezione degli assi è detto *centro*, i punti di intersezione tra gli assi e la figura stessa sono detti *vertici*.

Riferita a rette parallele agli assi	$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	Centro $O'(x_0;y_0)$
	$mx^2+ny^2+px+qy+r=0$	$\begin{cases} mn>0 \\ \dfrac{p^2}{4m}+\dfrac{q^2}{4n}-r>0 \\ O'\left(-\dfrac{p}{2m};-\dfrac{q}{2n}\right) \end{cases}$
Riferita agli assi	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \qquad a>b \quad \Leftrightarrow$	Fuochi sull'asse x, a semiasse maggiore b semiasse minore
	$F(\pm\sqrt{a^2-b^2};0)$	Coordinate dei fuochi
	$V(\pm a;0), V(0;\pm b)$	Coordinate dei vertici
Riferita agli assi	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \qquad a<b \quad \Leftrightarrow$	Fuochi sull'asse y, a semiasse minore b semiasse maggiore
	$F(0;\pm\sqrt{b^2-a^2})$	Coordinate dei fuochi
	$V(\pm a;0), V(0;\pm b)$	Coordinate dei vertici

A.6 L'iperbole

Definizione: luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti *fuochi*.
La figura così ottenuta ha due *assi di simmetria*. L'asse che interseca la figura stessa è detto *asse trasverso* (su di esso si trovano i fuochi) e l'altro *asse non trasverso*. Il punto di intersezione degli assi è detto *centro*, i punti di intersezione tra l'asse trasverso e la figura stessa sono detti *vertici*. Esistono due rette, detti *asintoti*, tali che la distanza tra ciasuna di esse e i punti dell'ellisse tende a zero al tendere all'infinito di x o y.

Riferita a rette parallele agli assi	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$\begin{cases}\text{Centro } O'(x_0;y_0)\\ \text{Asse trasverso orizzontale}\end{cases}$
	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1$	$\begin{cases}\text{Centro } O'(x_0;y_0)\\ \text{Asse trasverso verticale}\end{cases}$
	$mx^2+ny^2+px+qy+r=0$	$\begin{cases}mn<0\\ O'\left(-\frac{p}{2m};-\frac{q}{2n}\right)\end{cases}$
	$\frac{p^2}{4m}+\frac{q^2}{4n}-r>0$	Asse trasverso orizzontale
	$\frac{p^2}{4m}+\frac{q^2}{4n}-r<0$	Asse trasverso verticale
Riferita agli assi	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	a semiasse trasverso b semiasse non trasverso
	$F(\pm\sqrt{a^2+b^2};0)$	Coordinate dei fuochi
	$V(\pm a;0)$	Coordinate dei vertici
	$y=\pm\frac{b}{a}x$	Equazioni degli asintoti
Riferita agli assi	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$	a semiasse non trasverso b semiasse trasverso
	$F(0;\pm\sqrt{a^2+b^2})$	Coordinate dei fuochi
	$V(0;\pm b)$	Coordinate dei vertici
	$y=\pm\frac{b}{a}x$	Equazioni degli asintoti

A.7 L'iperbole equilatera

Definizione: iperbole con semiassi congruenti, ossia $a = b$.

Riferita agli assi	$x^2 - y^2 = a^2$	Fuochi sull'asse x
	$F(\pm a\sqrt{2}; 0)$	Coordinate dei fuochi
	$V(\pm a; 0)$	Coordinate dei vertici
	$y = \pm x$	Equazioni degli asintoti
Riferita agli assi	$x^2 - y^2 = -a^2$	Fuochi sull'asse y
	$F(0; \pm a\sqrt{2})$	Coordinate dei fuochi
	$V(0; \pm a)$	Coordinate dei vertici
	$y = \pm x$	Equazioni degli asintoti
Riferita ai propri asintoti	$xy = k \qquad k > 0, \qquad \Leftrightarrow$	occupa il I e III quadrante
	$F_1(\sqrt{2k}; \sqrt{2k}), F_2(-\sqrt{2k}; -\sqrt{2k})$	Coordinate dei fuochi
	$V_1(\sqrt{k}; \sqrt{k}), V_2(-\sqrt{k}; -\sqrt{k})$	Coordinate dei vertici
	$x = 0, \quad y = 0$	Equazioni degli asintoti
Riferita ai propri asintoti	$xy = k \qquad k < 0, \qquad \Leftrightarrow$	occupa il II e IV quadrante
	$F_1(-\sqrt{-2k}; \sqrt{-2k}), F_2(\sqrt{-2k}; -\sqrt{-2k})$	Coordinate dei fuochi
	$V_1(-\sqrt{-k}; \sqrt{-k}), V_2(\sqrt{-k}; -\sqrt{-k})$	Coordinate dei vertici
	$x = 0, \quad y = 0$	Equazioni degli asintoti
Funzione omografica	$y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$	$c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0$
	$\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$	Coordinate del centro
	$x = -\dfrac{d}{c}, \quad y = \dfrac{a}{c}$	Equazioni degli asintoti

B Goniometria

Nota: in quanto segue, con il simbolo $\sin^2 x$ si intende $(\sin x)^2$. È chiaro che questa scrittura non è corretta perché $\sin^2 x = \sin(\sin x)$ ma, essendo entrata nell'uso corrente ed essendo più veloce da scrivere, la adottiamo anche qui.

B.1 Relazioni fondamentali

Descrizione	relazione matematica	restrizioni
Relazione fondamentale:	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\forall x \in \mathbb{R}$
Definizione di tangente:	$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Definizione di cotangente:	$\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Definizione di secante:	$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Definizione di cosecante:	$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

B.2 Periodicità

$\sin(x + 2k\pi)$	$=$	$\sin x$	$\cos(x + 2k\pi)$	$=$	$\cos x$	$k \in \mathbb{Z}$
$\tan(x + k\pi)$	$=$	$\tan x$	$\cot(x + k\pi)$	$=$	$\cot x$	$k \in \mathbb{Z}$
$\sec(x + 2k\pi)$	$=$	$\sec x$	$\csc(x + 2k\pi)$	$=$	$\csc x$	$k \in \mathbb{Z}$

B.3 Formule di conversione

	noto $\sin x$	noto $\cos x$	nota $\tan x$
$\sin x =$	$\sin x$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$
$\cos x =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$
$\tan x =$	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$

Una volta noti $\sin x$, $\cos x$ o $\tan x$, il passaggio alle altre funzioni trigonometriche è banale essendo $\cot x = 1/\tan x$, $\sec x = 1/\cos x$ e $\csc x = 1/\sin x$.

B.4 Archi associati

$f(x)$	$\sin f(x)$	$\cos f(x)$	$\tan f(x)$	$\cot f(x)$
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\frac{\pi}{2} - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$\frac{\pi}{2} + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$
$\pi - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\pi + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\frac{3}{2}\pi - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$\frac{3}{2}\pi + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$
$2\pi - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$

Nota: questi archi associati sono deducibili immediatamente dal cerchio goniometrico, quindi è inutile memorizzarli.

B.5 Formule di addizione e sottrazione

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \\ \cot(x \pm y) &= \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot x \pm \cot y} \end{aligned}}$$

B.6 Formule di duplicazione e triplicazione

$$
\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\sin x\cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\
\tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(3x) &= 3\sin x - 4\sin^3 x \\
\cos(3x) &= 4\cos^3 x - 3\cos x \\
\tan(3x) &= \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}
\end{aligned}
$$

B.7 Formule di bisezione

$$
\begin{aligned}
\sin\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \\
\cos\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \\
\tan\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}
\end{aligned}
$$

B.8 Formule parametriche

$$
t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), x \neq \pi(1+2k)\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}
$$

B.9 Formule di prostaferesi e di Werner

$$
\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\
\sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\
\cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\
\cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin x\sin y &= \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right] \\
\cos x\cos y &= \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right] \\
\sin x\cos y &= \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]
\end{aligned}
$$

B.10 Archi noti

x[rad]	x[deg]	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
0	0	0	1	0	$\nexists$
$\frac{\pi}{12}$	$15°$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	$18°$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{8}$	$22°30'$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3}{8}\pi$	$67°30'$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
$\frac{5}{12}\pi$	$75°$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	$\nexists$	0

Nota: sono qui riportati solo gli archi del primo quadrante in quanto gli altri sono riconducibili a tale quadrante tramite gli archi associati (vedi §B.4).

C Derivate

C.1 Derivate fondamentali ed altre notevoli

derivate fondamentali

$f(x)$	$f'(x)$
$k, k \in \mathbb{R}$	0
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$a^x \log a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log a}$
$\log \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

altre derivate notevoli

$f(x)$	$f'(x)$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

D Sviluppi in serie di Taylor

D.1 Principali sviluppi di McLaurin

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

E Integrali

E.1 Integrali indefiniti immediati (o quasi)

Integrali fondamentali		Altri integrali notevoli	
$\int x^\alpha \, dx$	$= \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \neq -1$	$\int f'(x) \cdot [f(x)]^\alpha \, dx$	$= \dfrac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \neq -1$
$\int \dfrac{1}{x} \, dx$	$= \log\lvert x\rvert + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} \, dx$	$= \log\lvert f(x)\rvert + c$
$\int a^x \, dx$	$= \dfrac{a^x}{\log a} + c,\ a > 0 \wedge a \neq 1$	$\int f'(x) \cdot a^{f(x)} \, dx$	$= \dfrac{a^{f(x)}}{\log a} + c,\ a > 0 \wedge a \neq 1$
$\int e^x \, dx$	$= e^x + c$	$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} \, dx$	$= e^{f(x)} + c$
$\int \sin x \, dx$	$= -\cos x + c$	$\int f'(x) \cdot \sin[f(x)] \, dx$	$= -\cos[f(x)] + c$
$\int \cos x \, dx$	$= \sin x + c$	$\int f'(x) \cdot \cos[f(x)] \, dx$	$= \sin[f(x)] + c$
$\int \dfrac{1}{(\cos x)^2} \, dx$	$= \tan x + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{[\cos f(x)]^2} \, dx$	$= \tan[f(x)] + c$
$\int \dfrac{1}{(\sin x)^2} \, dx$	$= -\cot x + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{[\sin f(x)]^2} \, dx$	$= -\cot[f(x)] + c$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$	$= \arcsin x + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \, dx$	$= \arcsin[f(x)] + c$
$\int \dfrac{1}{1+x^2} \, dx$	$= \arctan x + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} \, dx$	$= \arctan[f(x)] + c$